Vom Term zur Parabel

Info 1: Quadratische Funktionen

Parabel	Graph einer quadratischen Funktion
Normalparabel	Graph von $f(x) = x^2$, in den Bildern grün gestrichelt
Hochpunkt H, Tiefpunkt T	höchster oder tiefster Punkt einer Parabel

Drei mögliche Formen der quadratischen Funktion

Allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$

x ist die Variable mit $x \in \mathbb{R}$

a, b, c sind Parameter: feste reelle Zahlen, wobei $a \neq 0$ sein muss.

Scheitelpunktform $f(x) = a(x-u)^2 + v$ mit dem Hoch- oder Tiefpunkt bei $(u\,|\,v)$

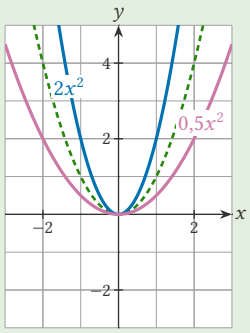
Nullstellenform $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ mit den Nullstellen x_1 und x_2

Diese Form existiert nur, wenn f Nullstellen hat.

Beispiel für die drei Formen: $f(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x-1)^2 - 8 = 2(x+1)(x-3)$

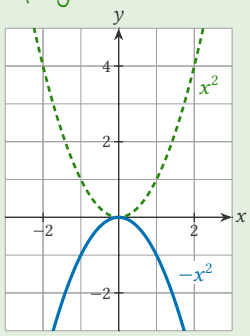
Info 2: Transformationen

Strecken und Stauchen



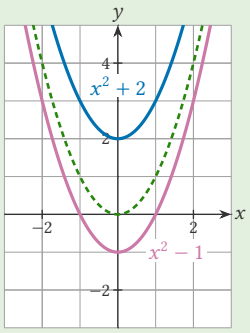
$a \cdot x^2$ mit $a > 1$:
gestreckt, also schmaler
$a \cdot x^2$ mit $0 < a < 1$:
gestaucht, also breiter

Spiegeln



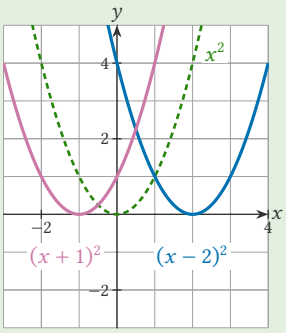
$-x^2$: an der x-Achse gespiegelt
$a \cdot x^2$ mit $a < 0$:
nach unten geöffnet

Nach oben und unten



$x^2 + 2$: um 2 nach oben
$x^2 - 1$: um 1 nach unten

Nach rechts und links



$(x-2)^2$: um 2 nach **rechts**
$(x+1)^2$: um 1 nach **links**

Allgemeine Regeln der Transformation

$f(x) = \boldsymbol{a}(x-u)^2 + v$	Streckung, Stauchung	$a > 1$: gestreckt, $0 < a < 1$: gestaucht (in y-Richtung)
	Spiegelung	$a < 0$: zusätzlich an der x-Achse gespiegelt
$f(x) = a(x-u)^2 + \boldsymbol{v}$	Vertikale Verschiebung	um v nach oben ($v > 0$) oder unten ($v < 0$)
$f(x) = a(x-\boldsymbol{u})^2 + v$	Horizontale Verschiebung	um u nach rechts ($u > 0$) oder links ($u < 0$)

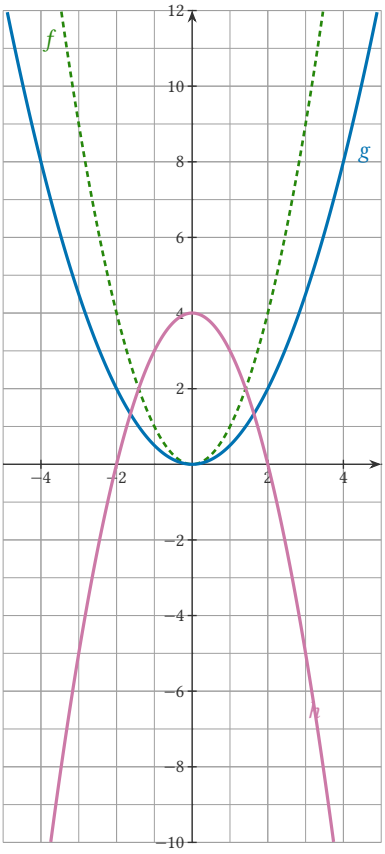
Beispiel: $f(x) = -0{,}5(x+3)^2 + 2 = -0{,}5(x-(-3))^2 + 2$

$a = -0{,}5$: gespiegelt und mit dem Faktor 0,5 gestaucht

$u = -3$: um 3 nach links, $v = 2$: um 2 nach oben, also Hochpunkt $H(-3\,|\,2)$

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

1 Graphen zeichnen



Die Normalparabel $f(x) = x^2$ ist im Koordinatensystem schon eingezeichnet.

a) Zeichne die Graphen von $g(x) = 0{,}5\,x^2$ und $h(x) = -x^2 + 4$ in das Koordinatensystem. Gehe dabei vom Graphen von f aus. Nutze die Wertetabelle, falls du den Graphen nicht direkt zeichnen kannst.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5
$h(x)$	-5	0	3	4	3	0	-5

b) Beschreibe, wie die Graphen von g und h aus der Normalparabel entstehen. Gib jeweils den Hochpunkt oder den Tiefpunkt an.

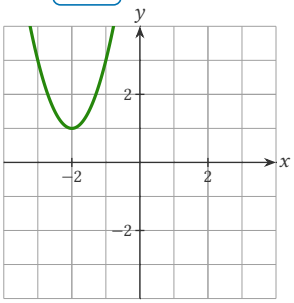
g: Normalparabel gestaucht (breiter), Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$.
h: Normalparabel an der x-Achse gespiegelt und um 4 nach oben verschoben, Hochpunkt $H(0\,|\,4)$.

2 Welcher Term gehört zu welchem Graphen?

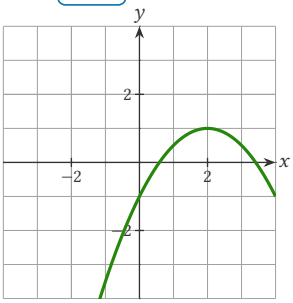
Zu jedem Graphen passt genau einer der Terme. Vier Terme bleiben übrig. Trage bei jedem Graphen den Buchstaben des passenden Terms ein.

A $2(x-2)^2+1$	B $0{,}25(x+1)^2-2$	C $(x-2)^2+1$	D $-0{,}5(x-2)^2+1$
E $4(x+1)^2-2$	F $2(x+2)^2+1$	G $0{,}5(x-2)^2+1$	H $(x-1)^2+2$

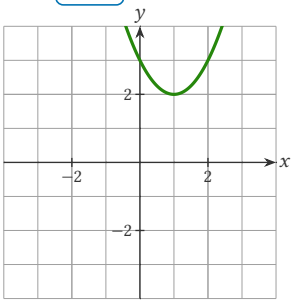
(1) F



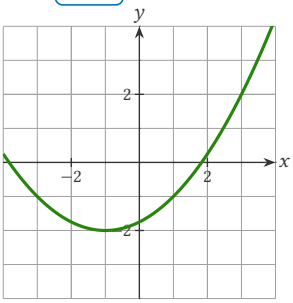
(2) D



(3) H



(4) B



CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

3 Parabeln mit Schiebereglern mit GeoGebra

GeoGebra: Eingabe: `f(x)=a*(x-u)^2+v` GeoGebra legt dazu Schieberegler für a, u und v an.
Kommazahlen schreibst du mit Punkt. Genaue Werte tippst du direkt ein, etwa `a=0.25`.

a) Stelle die Schieberegler so ein, dass du nacheinander die Graphen (1) bis (4) aus Aufgabe 2 erhältst. Trage die Werte in die Tabelle ein.

Graph	(1)	(2)	(3)	(4)
a	2	$-0{,}5$	1	0,25
u	-2	2	1	-1
v	1	1	2	-2

b) Verändere nur a. Beschreibe, was sich am Graphen ändert und was gleich bleibt.

Die Parabel wird schmaler oder breiter, bei $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet.
Der Hochpunkt oder Tiefpunkt bleibt an derselben Stelle.

c) Stelle $a = 0$ ein. Beschreibe den Graphen. Erkläre, warum in Info 1 $a \neq 0$ steht.

Der Graph ist eine waagerechte Gerade (in der Höhe v).
Ohne x^2 ist die Funktion nicht quadratisch, der Graph ist keine Parabel.

d) Stelle $u = 1$ und $v = 2$ ein. Suche einen Wert für a, sodass der Graph durch den Ursprung geht. Prüfe deinen Wert mit einer Rechnung.

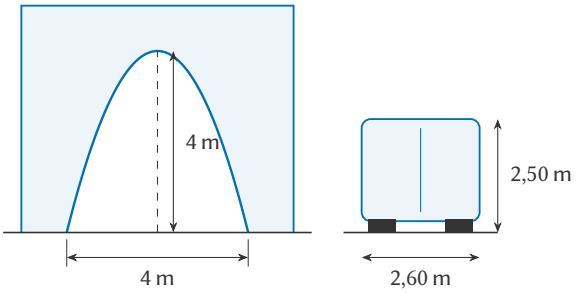
$a = -2$, also $f(x) = -2 \cdot (x-1)^2 + 2$.
Rechnung: $f(0) = -2 \cdot (0-1)^2 + 2 = -2 + 2 = 0$. Der Graph geht durch $(0\,|\,0)$.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

4 Das Werkstor

Das Tor einer Werkshalle hat die Form einer Parabel. Es ist am Boden 4 m breit und in der Mitte 4 m hoch.

Ein Lieferwagen ist 2,60 m breit und 2,50 m hoch. Er fährt genau in der Mitte durch das Tor.



a) Passt der Lieferwagen durch das Tor?

Ursprung am Boden in der Mitte, 1 Einheit = 1 m. Hochpunkt $H(0\,|\,4)$, also $f(x) = a \cdot x^2 + 4$.
Der Punkt $(2\,|\,0)$ liegt auf der Parabel: $0 = a \cdot 4 + 4$, also $a = -1$ und $f(x) = -x^2 + 4$.
Die Kante des Lieferwagens liegt bei $x = 1{,}3$ m, und damit ergibt sich $f(1{,}3) = -1{,}69 + 4 = 2{,}31$ m.
Dort ist das Tor also nur 2,31 m hoch, der Lieferwagen aber 2,50 m.
Der Lieferwagen passt nicht durch das Tor (es fehlen 19 cm).

b) Ein zweites Tor ist ebenfalls 4 m breit, aber 5 m hoch. Passt der Lieferwagen hier durch? Vergleiche auch die Terme der beiden Tore.

$f_2(x) = a \cdot x^2 + 5$ mit $0 = a \cdot 4 + 5$, also $a = -1{,}25$ und $f_2(x) = -1{,}25\,x^2 + 5$.
$f_2(1{,}3) = -2{,}1125 + 5 \approx 2{,}89 > 2{,}50$. Der Lieferwagen passt durch (rund 39 cm Luft).
Vergleich: $f_2(x) = 1{,}25 \cdot f(x)$. Jede Höhe ist 1,25-mal so groß:
Die Parabel ist in y-Richtung mit dem Faktor 1,25 gestreckt.

c) Aylin hat für das erste Tor den Term $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ gefunden. Hat Aylin recht? Begründe.

Ja. Aylin hat den Ursprung in den linken Fuß des Tores gelegt.
Ihr Graph ist die Parabel aus a), um 2 nach rechts verschoben: $H(2\,|\,4)$,
Fußpunkte bei $x = 0$ und $x = 4$. Form und Höhe bleiben gleich.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Rechentraining

5 Quadrate und Binome

Schreibe ohne Klammern und fasse zusammen.

a) $(-5x)^2$

$= (-5x)\cdot(-5x)$

$= 25x^2$

b) $-(3x)^2$

$= -(3x)\cdot(3x)$

$= -9x^2$

c) $(2+3x)^2$

$= (2+3x)\cdot(2+3x)$

$= 4 + 6x + 6x + 9x^2$

$= 9x^2 + 12x + 4$

d) $2(x-3)(x+4)$

$= 2\cdot(x^2 + 4x - 3x - 12)$

$= 2\cdot(x^2 + x - 12)$

$= 2x^2 + 2x - 24$

e) $-(-2x)^2 + 7x^2$

$= -4x^2 + 7x^2$

$= 3x^2$

f) $(-0{,}5 - 4x)^2$

$= (-0{,}5 - 4x)\cdot(-0{,}5 - 4x)$

$= 0{,}25 + 2x + 2x + 16x^2$

$= 16x^2 + 4x + 0{,}25$

6 Punkt auf dem Graphen

Der Punkt P liegt auf dem Graphen von f. Bestimme die fehlende Zahl und schreibe die Rechnung auf.

a) $f(x) = a(x-1)^2 + 3 \quad P(3\,|\,-13)$

$a\cdot(3-1)^2 + 3 = -13$

$\Rightarrow 4a + 3 = -13 \quad | -3$

$\Rightarrow 4a = -16 \quad | : 4$

$\Rightarrow a = -4$

b) $f(x) = -(x+2)^2 + e \quad P(1\,|\,-2)$

$-(1+2)^2 + e = -2$

$\Rightarrow -9 + e = -2 \quad | +9$

$\Rightarrow e = 7$

c) $f(x) = (x-d)^2 - 3 \quad P(4\,|\,1)$

$(4-d)^2 - 3 = 1 \quad | +3$

$\Rightarrow (4-d)^2 = 4 \quad | \sqrt{}$

$\Rightarrow 4 - d = 2 \text{ oder } 4 - d = -2$

$\Rightarrow d = 2 \text{ oder } d = 6$

d) $f(x) = x^2 + bx - 1 \quad P(2\,|\,-7)$

$2^2 + b\cdot 2 - 1 = -7$

$\Rightarrow 2b + 3 = -7 \quad | -3$

$\Rightarrow 2b = -10 \quad | : 2$

$\Rightarrow b = -5$

e) $f(x) = tx^2 + 2t \quad P(-2\,|\,3)$

$t\cdot(-2)^2 + 2t = 3$

$\Rightarrow 4t + 2t = 3$

$\Rightarrow 6t = 3 \quad | : 6$

$\Rightarrow t = 0{,}5$

f) $f(x) = a(x-3)(x+2) \quad P(-5\,|\,3)$

$a\cdot(-5-3)\cdot(-5+2) = 3$

$\Rightarrow a\cdot(-8)\cdot(-3) = 3$

$\Rightarrow 24a = 3 \quad | : 24$

$\Rightarrow a = 0{,}125$

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul