Vom Term zur Parabel

Info 1: Quadratische Funktionen

Parabel	Graph einer quadratischen Funktion
Normalparabel	Graph von $f(x) = x^2$, in den Bildern grün gestrichelt
Hochpunkt H, Tiefpunkt T	höchster oder tiefster Punkt einer Parabel

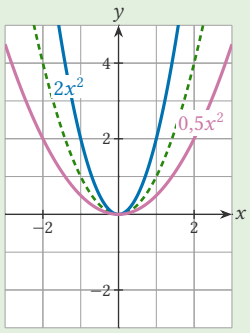
Drei mögliche Formen der quadratischen Funktion

Allgemeine Form	$f(x) = ax^2 + bx + c$ x ist die Variable mit $x \in \mathbb{R}$ a, b, c sind Parameter: feste reelle Zahlen, wobei $a \neq 0$ sein muss.
Scheitelpunktform	$f(x) = a(x-u)^2 + v$ mit dem Hoch- oder Tiefpunkt bei $(u\,|\,v)$
Nullstellenform	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ mit den Nullstellen x_1 und x_2 Diese Form existiert nur, wenn f Nullstellen hat.

Beispiel für die drei Formen: $f(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x-1)^2 - 8 = 2(x+1)(x-3)$

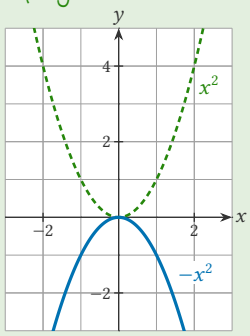
Info 2: Transformationen

Strecken und Stauchen



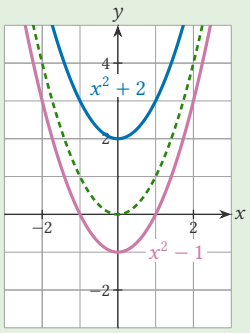
$a \cdot x^2$ mit $a > 1$:
gestreckt, also schmaler
$a \cdot x^2$ mit $0 < a < 1$:
gestaucht, also breiter

Spiegeln



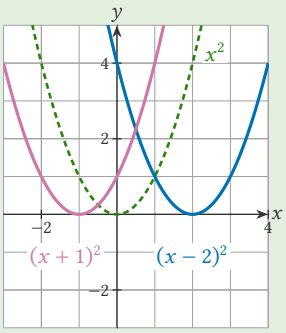
$-x^2$: an der x-Achse gespiegelt
$a \cdot x^2$ mit $a < 0$:
nach unten geöffnet

Nach oben und unten



$x^2 + 2$: um 2 nach oben
$x^2 - 1$: um 1 nach unten

Nach rechts und links



$(x-2)^2$: um 2 nach **rechts**
$(x+1)^2$: um 1 nach **links**

Allgemeine Regeln der Transformation

$f(x) = \boldsymbol{a}(x-u)^2 + v$	Streckung, Stauchung	$a > 1$: gestreckt, $0 < a < 1$: gestaucht (in y-Richtung)
	Spiegelung	$a < 0$: zusätzlich an der x-Achse gespiegelt
$f(x) = a(x-u)^2 + \boldsymbol{v}$	Vertikale Verschiebung	um v nach oben ($v > 0$) oder unten ($v < 0$)
$f(x) = a(x-\boldsymbol{u})^2 + v$	Horizontale Verschiebung	um u nach rechts ($u > 0$) oder links ($u < 0$)

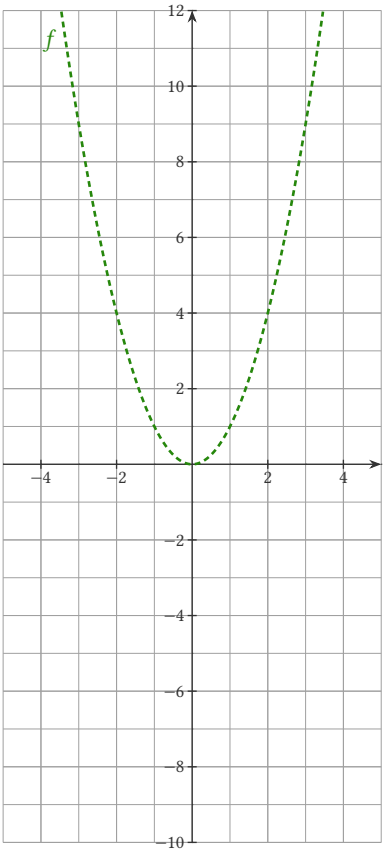
Beispiel: $f(x) = -0{,}5(x+3)^2 + 2 = -0{,}5(x-(-3))^2 + 2$

$a = -0{,}5$: gespiegelt und mit dem Faktor 0,5 gestaucht

$u = -3$: um 3 nach links, $v = 2$: um 2 nach oben, also Hochpunkt $H(-3\,|\,2)$

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

1 Graphen zeichnen



Die Normalparabel $f(x) = x^2$ ist im Koordinatensystem schon eingezeichnet.

a) Zeichne die Graphen von $g(x) = 0{,}5\,x^2$ und $h(x) = -x^2 + 4$ in das Koordinatensystem. Gehe dabei vom Graphen von f aus. Nutze die Wertetabelle, falls du den Graphen nicht direkt zeichnen kannst.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)$							
$h(x)$							

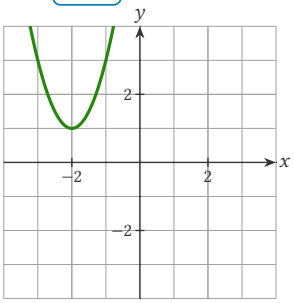
b) Beschreibe, wie die Graphen von g und h aus der Normalparabel entstehen. Gib jeweils den Hochpunkt oder den Tiefpunkt an.

2 Welcher Term gehört zu welchem Graphen?

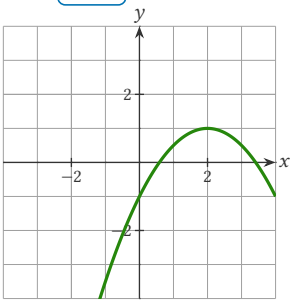
Zu jedem Graphen passt genau einer der Terme. Vier Terme bleiben übrig. Trage bei jedem Graphen den Buchstaben des passenden Terms ein.

A $2(x-2)^2+1$	B $0{,}25(x+1)^2-2$	C $(x-2)^2+1$	D $-0{,}5(x-2)^2+1$
E $4(x+1)^2-2$	F $2(x+2)^2+1$	G $0{,}5(x-2)^2+1$	H $(x-1)^2+2$

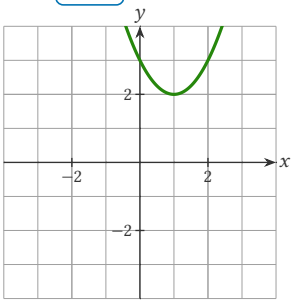
(1) ☐



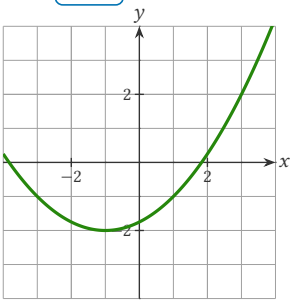
(2) ☐



(3) ☐



(4) ☐



CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

3 Parabeln mit Schiebereglern mit GeoGebra

GeoGebra: Eingabe: `f(x)=a*(x-u)^2+v` GeoGebra legt dazu Schieberegler für a, u und v an. Kommazahlen schreibst du mit Punkt. Genaue Werte tippst du direkt ein, etwa `a=0.25`.

a) Stelle die Schieberegler so ein, dass du nacheinander die Graphen (1) bis (4) aus Aufgabe 2 erhältst. Trage die Werte in die Tabelle ein.

Graph	(1)	(2)	(3)	(4)
a				
u				
v				

b) Verändere nur a. Beschreibe, was sich am Graphen ändert und was gleich bleibt.

c) Stelle $a = 0$ ein. Beschreibe den Graphen. Erkläre, warum in Info 1 $a \neq 0$ steht.

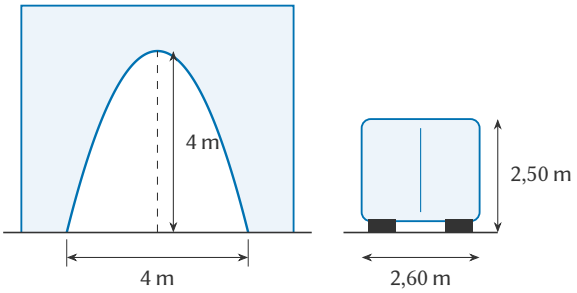
d) Stelle $u = 1$ und $v = 2$ ein. Suche einen Wert für a, sodass der Graph durch den Ursprung geht. Prüfe deinen Wert mit einer Rechnung.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

4 Das Werkstor

Das Tor einer Werkshalle hat die Form einer Parabel. Es ist am Boden 4 m breit und in der Mitte 4 m hoch.

Ein Lieferwagen ist 2,60 m breit und 2,50 m hoch. Er fährt genau in der Mitte durch das Tor.



a) Passt der Lieferwagen durch das Tor?

b) Ein zweites Tor ist ebenfalls 4 m breit, aber 5 m hoch. Passt der Lieferwagen hier durch? Vergleiche auch die Terme der beiden Tore.

c) Aylin hat für das erste Tor den Term $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ gefunden. Hat Aylin recht? Begründe.

Rechentraining

5 Quadrate und Binome

Schreibe ohne Klammern und fasse zusammen.

a) $(-5x)^2$

b) $-(3x)^2$

c) $(2+3x)^2$

d) $2(x-3)(x+4)$

e) $-(-2x)^2+7x^2$

f) $(-0{,}5-4x)^2$

Kontrollergebnisse: $3x^2$ $2x^2+2x-24$ $-9x^2$ $9x^2+12x+4$ $16x^2+4x+0{,}25$ $25x^2$

6 Punkt auf dem Graphen

Der Punkt P liegt auf dem Graphen von f. Bestimme die fehlende Zahl und schreibe die Rechnung auf.

a) $f(x)=a(x-1)^2+3 \quad P(3\,|\,-13)$

b) $f(x)=-(x+2)^2+e \quad P(1\,|\,-2)$

c) $f(x)=(x-d)^2-3 \quad P(4\,|\,1)$

d) $f(x)=x^2+bx-1 \quad P(2\,|\,-7)$

e) $f(x)=tx^2+2t \quad P(-2\,|\,3)$

f) $f(x)=a(x-3)(x+2) \quad P(-5\,|\,3)$

Kontrollergebnisse: 0,125 0,5 2 −4 −5 6 7

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul