Quadratische Funktionen

Probeklassenarbeit

Name: _____

Punkte: ☐ von 56 Note: ☐

In der Klassenarbeit kommt dran:

• Parabeln verschieben, strecken und spiegeln	Vom Term zur Parabel
• Wurzel ziehen, Produkt gleich null, Ausklammern	Nullstellen ohne Formel Info 1
• Hoch- und Tiefpunkt bestimmen	Nullstellen ohne Formel Info 2
• p,q-Formel und Anzahl der Lösungen	Die p,q-Formel Info 1 und 2
• Den schnellsten Rechenweg wählen	Die p,q-Formel Info 3
• Binomische Formeln	Die p,q-Formel Info 4
• Linearfaktorform und Vielfachheit	Nullstellen bestimmen die Funktion Info 1 und 2
• Parabel und Gerade	Nullstellen bestimmen die Funktion Info 3
• Funktionsterm aus drei Punkten, Anwendungen	Der Korbwurf

Hinweise:

- 90 Minuten, Taschenrechner erlaubt, kein GeoGebra
- Gleichungssysteme: immer Gauß-Jordan-Verfahren
- Hoch- und Tiefpunkte: ohne Differenzialrechnung
- Klassenarbeit: andere Aufgaben, andere Reihenfolge

Anforderungsbereiche:

- ■□□ I Reproduzieren
- ■■□ II Zusammenhänge herstellen
- ■■■ III Verallgemeinern und Reflektieren

1 Kreuze jeweils die richtige Antwort an. Genau eine Antwort ist richtig. [5 P.]

■□□ a) Der Graph von $f(x) = -2 \cdot (x-3)^2 + 1$ hat ... 1P

☐ den Tiefpunkt $T(3\,|\,1)$ ☒ den Hochpunkt $H(3\,|\,1)$ ☐ den Hochpunkt $H(-3\,|\,1)$

| $a = -2 < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet, hat also einen Hochpunkt. $(x-3)$ verschiebt um 3 nach rechts.

■□□ b) Im Vergleich zur Normalparabel ist der Graph von $g(x) = 0{,}25\,x^2$ ... 1P

☒ breiter ☐ schmaler ☐ um 0,25 nach oben verschoben

| Bei $0 < a < 1$ wird die Parabel gestaucht, also breiter. Um 0,25 nach oben verschoben wäre der Graph von $x^2 + 0{,}25$.

■□□ c) Die Funktion $h(x) = 3 \cdot (x+4) \cdot (x-1)$ hat die Nullstellen ... 1P

☐ 4 und -1 ☐ 3, -4 und 1 ☒ -4 und 1

| $x+4$ wird bei -4 null, $x-1$ bei 1. Der Faktor 3 streckt nur, er wird nie null.

■□□ d) Die Gleichung $x^2 + 2x + 5 = 0$ hat ... 1P

☒ keine Lösung ☐ genau eine Lösung ☐ zwei Lösungen

| Achtung: Der Wert unter der Wurzel ist $1^2 - 5 = -4 < 0$. Wer $1 + 5$ rechnet, hat das Minus vor q vergessen.

■□□ e) Der Graph von $k(x) = 2 \cdot (x+1)^2$ ... die x-Achse. 1P

☐ schneidet zweimal ☒ berührt ☐ trifft nicht

| $(x+1)^2 = (x+1) \cdot (x+1)$: Die Nullstelle -1 ist doppelt. Der Graph berührt die x-Achse in seinem Tiefpunkt $(-1\,|\,0)$.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

2 Bestimme die Nullstellen. Wähle jeweils einen geschickten Weg. [10 P.]

a) $f(x) = 3x^2 - 27$ 2 P

$3x^2 - 27 = 0 \quad | +27$
$\Rightarrow 3x^2 = 27 \quad | :3$
$\Rightarrow x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$ 1
$\Rightarrow x_1 = -3, \; x_2 = 3$ 1
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3;\ 3\}$

Achtung: Wurzel ziehen liefert zwei Lösungen, auch -3.

b) $g(x) = 2x^2 - 7x$ 2 P

$2x^2 - 7x = 0$
$\Rightarrow x \cdot (2x - 7) = 0$ 1
$\Rightarrow x = 0 \text{ oder } 2x - 7 = 0$
$2x - 7 = 0 \quad | +7$
$\Rightarrow 2x = 7 \quad | :2$
$\Rightarrow x = 3{,}5$
$\Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 3{,}5$ 1
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{0;\ 3{,}5\}$

Achtung: Nicht durch x teilen, sonst geht die Lösung 0 verloren.

c) $h(x) = -2x^2 + 4x + 6$ 3 P

$-2x^2 + 4x + 6 = 0 \quad | :(-2)$
$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \quad | p, q$ 1
$p = -2, \; q = -3$

$$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)}$$
$$= 1 \pm \sqrt{1 + 3}$$ 1
$$= 1 \pm 2$$
$\Rightarrow x_1 = 3, \; x_2 = -1$ 1
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1;\ 3\}$

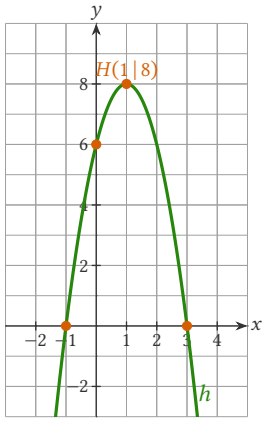
Achtung: Erst normieren, also alle drei Glieder durch -2 teilen. Ohne Normieren liefert die p,q-Formel fälschlich „keine Lösung“.

d) Bestimme den Hochpunkt oder den Tiefpunkt von h. Skizziere den Graphen von h im Koordinatensystem. 3 P

Mitte der Nullstellen: $x = \frac{-1 + 3}{2} = 1$ 1
$h(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 6 = 8$
Hochpunkt $H(1\,|\,8)$, denn $a = -2 < 0$ 1
Skizze: Nullstellen, Hochpunkt und $h(0) = 6$ eintragen, dann verbinden 1

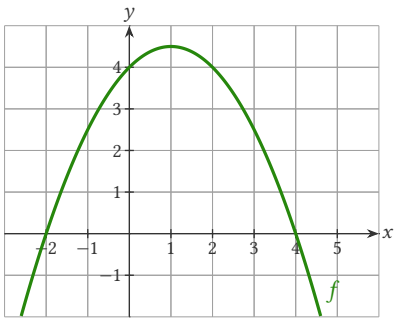
Die Parabel ist symmetrisch. Ihr Hoch- oder Tiefpunkt liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen.

Probe: $h(0) = 6$ und $h(2) = 6$: Stellen gleich weit links und rechts von 1 haben denselben Funktionswert.



3 Bestimme zu jedem Graphen den Funktionsterm in Linearfaktorform. [8 P.]

a) Graph von f — 3 P



Nullstellen -2 und 4:

$$f(x) = a\cdot(x+2)\cdot(x-4) \qquad 1$$

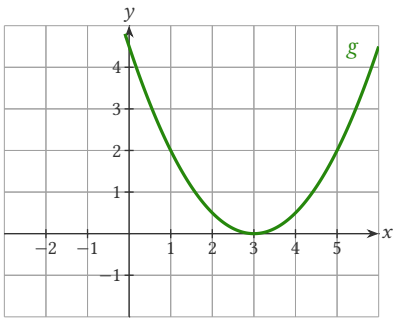
Punkt $(0\,|\,4)$:

$$f(0) = 4$$
$$\Rightarrow\ a\cdot(0+2)\cdot(0-4) = 4$$
$$\Rightarrow\ a\cdot 2\cdot(-4) = 4$$
$$\Rightarrow\ -8a = 4 \qquad |:(-8)$$
$$\Rightarrow\ a = -0{,}5 \qquad 1$$
$$f(x) = -0{,}5\cdot(x+2)\cdot(x-4) \qquad 1$$

Achtung: Zur Nullstelle -2 gehört der Faktor $(x+2)$, nicht $(x-2)$.

Probe: $f(7) = -0{,}5\cdot 9\cdot 3 = -13{,}5$

b) Graph von g — 3 P



Doppelte Nullstelle 3:

$$g(x) = a\cdot(x-3)^2 \qquad 1$$

Punkt $(1\,|\,2)$:

$$g(1) = 2$$
$$\Rightarrow\ a\cdot(1-3)^2 = 2$$
$$\Rightarrow\ 4a = 2 \qquad |:4$$
$$\Rightarrow\ a = 0{,}5 \qquad 1$$
$$g(x) = 0{,}5\cdot(x-3)^2 \qquad 1$$

Der Graph berührt die x-Achse bei 3. Die Nullstelle ist doppelt, ihr Linearfaktor steht im Quadrat.

Probe: $g(7) = 0{,}5\cdot 16 = 8$

c) Bestimme die allgemeine Form von $h(x) = 2\cdot(x+1)^2$. — 2 P

$$h(x) = 2\cdot(x+1)^2$$
$$= 2\cdot\left(x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2\right) \qquad 1$$
$$= 2\cdot\left(x^2 + 2x + 1\right)$$
$$= 2x^2 + 4x + 2 \qquad 1$$

Achtung: Die 1. binomische Formel liefert den mittleren Term $2x$. Der Faktor 2 gilt für jedes Glied in der Klammer.

Probe: $h(3) = 2\cdot 9 + 4\cdot 3 + 2 = 32$, und mit dem gegebenen Term $2\cdot 4^2 = 32$.

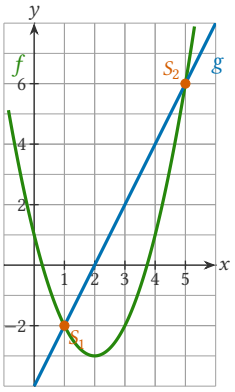
CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

4 Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2 - 4x + 1$. [7 P.]

a) Bestimme die gemeinsamen Punkte der Parabel f und der Geraden $g(x) = 2x - 4$. Gib an, wie die Gerade g zur Parabel liegt. 5 P

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - 4x + 1 = 2x - 4 \quad | -2x + 4$$
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \quad | p, q$$ 1
$$p = -6,\ q = 5$$
$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5}$$
$$= 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm 2$$ 1
$$\Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 1$$ 1
$g(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2,\ g(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6 \Rightarrow S_1(1\,|\,-2),\ S_2(5\,|\,6)$ 1
Zwei gemeinsame Punkte: g schneidet die Parabel, g ist eine Sekante. 1

| Probe: Die y-Werte mit dem anderen Term prüfen: $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$ und $f(5) = 25 - 20 + 1 = 6$.

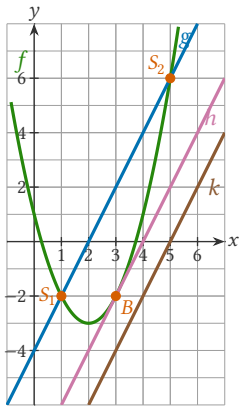


b) Begründe, dass jede Gerade mit der Parabel f höchstens zwei gemeinsame Punkte hat. 2 P

Gemeinsame Punkte: $f(x)$ mit dem Term der Geraden gleichsetzen.
Nur $f(x)$ enthält x^2. Bringt man alles auf eine Seite, bleibt x^2 stehen:
Es entsteht eine quadratische Gleichung. 1
Eine quadratische Gleichung hat höchstens zwei Lösungen, denn die p,q-Formel
liefert zwei Lösungen, eine oder keine. 1
Jede Lösung ist die x-Koordinate eines gemeinsamen Punktes.

| Auch richtig: Mit den Zahlen aus a) argumentieren, wenn klar wird: Bei jeder Geraden entsteht eine Gleichung $x^2 + px + q = 0$, nur mit anderen Zahlen für p und q.

| Im Bild: g schneidet die Parabel in S_1 und S_2, h berührt sie in B, k trifft sie nicht. Ein Bild begründet das aber nicht, es zeigt nur einige Geraden.



5 In einem Plattenmuster liegen weiße Platten in einem Quadrat. Ringsum liegt ein Rand aus blauen Platten.

Figur n hat n^2 weiße und $4n + 4$ blaue Platten. [7 P.]



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Kreuze zuerst an, was du vermutest. Untersuche dann rechnerisch, ob es eine Figur mit gleich vielen weißen und blauen Platten gibt. 4 P

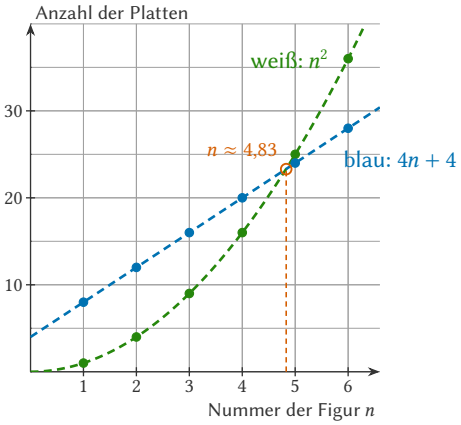
☐ Es gibt eine solche Figur. ☒ Es gibt keine solche Figur. Lösung: siehe Rechnung

$$n^2 = 4n + 4 \quad | -4n - 4$$
$$\Rightarrow\ n^2 - 4n - 4 = 0 \quad | p, q \qquad 1$$
$$p = -4,\ q = -4$$
$$n_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-4)}$$
$$= 2 \pm \sqrt{4 + 4} = 2 \pm \sqrt{8} \qquad 1$$
$$\Rightarrow\ n_1 = 2 + \sqrt{8} \approx 4{,}83,\ \ n_2 = 2 - \sqrt{8} \approx -0{,}83 \qquad 1$$

Figuren haben die Nummern 1, 2, 3, … Keine Lösung ist eine Figurennummer.
Es gibt keine Figur mit gleich vielen weißen und blauen Platten. 1

Die Vermutung gibt keine Punkte. Wer nach der Rechnung aufhört, hat die Aufgabe nicht gelöst: Erst die Deutung entscheidet.

Im Bild: Nur ganze n sind Figuren (Punkte). Die beiden Graphen schneiden sich bei $n \approx 4{,}83$, zwischen Figur 4 und Figur 5. Ab Figur 5 liegen die weißen Platten vorn (Teil b).



b) Gib an, ab welcher Figur es mehr weiße als blaue Platten gibt. Begründe, dass auch alle folgenden Figuren mehr weiße als blaue Platten haben. 3 P

Figur 4: 16 weiße und 20 blaue Platten. Figur 5: 25 weiße und 24 blaue Platten.
Ab Figur 5 gibt es mehr weiße als blaue Platten. 1
$n^2 - (4n + 4) = n^2 - 4n - 4$ ist eine nach oben geöffnete Parabel
mit den Nullstellen $n_1 \approx 4{,}83$ und $n_2 \approx -0{,}83$ aus a). 1
Rechts von 4,83 ist sie positiv: Für alle $n \geq 5$ ist $n^2 > 4n + 4$,
es gibt also mehr weiße als blaue Platten. 1

Auch richtig: Von Figur n zu Figur $n + 1$ kommen $2n + 1$ weiße Platten hinzu, aber nur 4 blaue. Ab Figur 2 kommen also mehr weiße als blaue hinzu, und ab Figur 5 bleiben die weißen vorn.

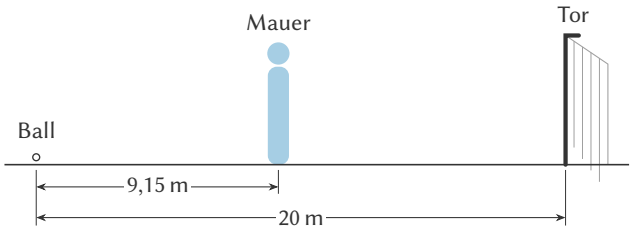
CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

6 Bei einem Freistoß liegt der Ball 20 m vor dem Tor. Die Mauer muss 9,15 m vom Ball entfernt stehen. Ihre Spieler springen hoch und kommen mit dem Kopf bis 2,40 m. Die Latte des Tores hängt 2,44 m hoch.

Die Flugbahn ist eine Parabel. $F(x)$ gibt an, wie hoch der Ball in x Metern Entfernung vom Abschuss ist. Wir sehen den Ball als Punkt. [19 P.]

Messwerte aus einer Videoanalyse:

x in m	0	5	10
$F(x)$ in m	0	2	3



a) Bestimme aus den Messwerten den Funktionsterm $F(x) = ax^2 + bx + c$. 5 P

Der Ball liegt bei $x = 0$ am Boden: $c = F(0) = 0$ 1

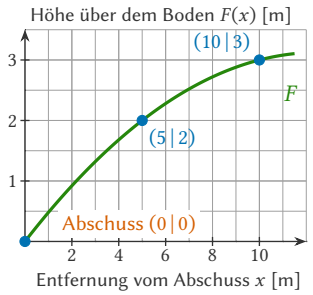
Aus $F(5) = 2$ und $F(10) = 3$:

I: $a \cdot 5^2 + b \cdot 5 = 2$

$\Rightarrow \quad 25a + 5b = 2$

II: $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 = 3$

$\Rightarrow \; 100a + 10b = 3$



1

1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 25 & 5 & 2 \\ 100 & 10 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-4\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 25 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II} : (-10)} \left(\begin{array}{cc|c} 25 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right)$$

1

$$\xrightarrow{-5\cdot \mathrm{II} + \mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 25 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} : 25} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -0{,}02 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right)$$

1

$\Rightarrow \; \mathbb{L} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -0{,}02, \quad b = 0{,}5, \quad c = 0\}$

Also: $F(x) = -0{,}02x^2 + 0{,}5x$ 1

Wie beim Korbwurf: c ist der Funktionswert an der Stelle 0. Danach fehlen nur noch a und b, also reichen zwei Gleichungen. Links soll am Ende in jeder Zeile eine 1 stehen und sonst 0, rechts stehen dann a und b.

b) Untersuche, ob der Ball über die Mauer fliegt und ob er unter der Latte ins Tor geht. 3 P

x ist die Entfernung vom Abschuss: Mauer an der Stelle 9,15, Tor an der Stelle 20. 1

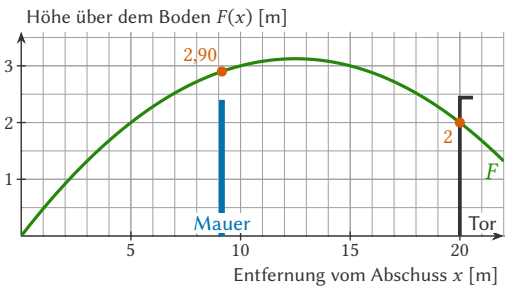
Mauer: $F(9{,}15) = -0{,}02 \cdot 9{,}15^2 + 0{,}5 \cdot 9{,}15 \approx 2{,}90$

$2{,}90\,\text{m} > 2{,}40\,\text{m}$: Der Ball fliegt über die Mauer. 1

Tor: $F(20) = -0{,}02 \cdot 400 + 0{,}5 \cdot 20 = -8 + 10 = 2$

$2\,\text{m} < 2{,}44\,\text{m}$: Der Ball geht unter der Latte ins Tor. 1

Im Bild: Der Ball ist über der Mauer 2,90 m hoch und an der Torlinie 2 m.

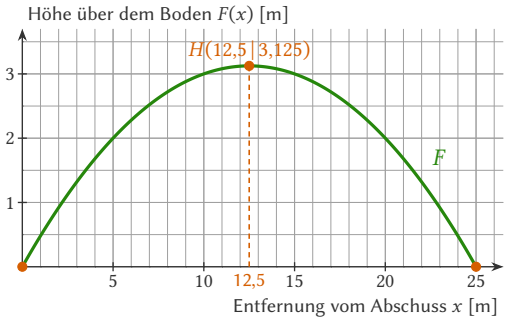


■■□ c) Bestimme die größte Höhe des Balls und die Entfernung vom Abschuss, in der er diese Höhe erreicht. 4 P

Nullstellen:

$$-0{,}02x^2 + 0{,}5x = 0$$
$$\Rightarrow\ x\cdot(-0{,}02x + 0{,}5) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 0 \text{ oder } -0{,}02x + 0{,}5 = 0$$
$$-0{,}02x + 0{,}5 = 0 \quad | -0{,}5$$
$$\Rightarrow\ -0{,}02x = -0{,}5 \quad | :(-0{,}02)$$
$$\Rightarrow\ x = 25$$
$$\Rightarrow\ x_1 = 0,\ x_2 = 25$$

Mitte: $x = \frac{0+25}{2} = 12{,}5$



1

1

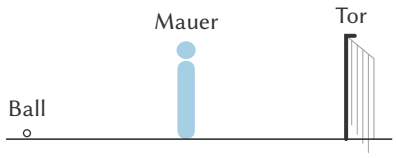
$F(12{,}5) = -0{,}02\cdot 12{,}5^2 + 0{,}5\cdot 12{,}5 = -3{,}125 + 6{,}25 = 3{,}125$

Der Ball fliegt höchstens etwa 3,13 m hoch, in 12,5 m Entfernung vom Abschuss. 1

Auch richtig: Statt der Nullstellen zwei gleich hohe Stellen, etwa $F(10) = 3$ und $F(15) = 3$. Sie liegen symmetrisch zum Hochpunkt, die Mitte von 10 und 15 ist 12,5.

■■■ d) Bei einem anderen Freistoß ist das Tor weniger als 20 m vom Ball entfernt. Die Flugbahn ist weiterhin dieselbe, und der Ball fliegt dabei jedes Mal über die Mauer. Ein direkter Freistoß aufs Tor muss mehr als 16,5 m vom Tor entfernt sein. Bestimme die kleinste Entfernung zwischen Ball und Tor, bei der der Ball noch unter der Latte ins Tor geht. 7 P

Die Flugbahn ist dieselbe, also bleibt die Funktion F.
Der Abschuss bleibt im Ursprung $(0\,|\,0)$. Ist das Tor x Meter vom Ball entfernt, steht es an der Stelle x.
Dort ist der Ball $F(x)$ Meter über dem Boden.



Unter der Latte heißt: Diese Höhe ist kleiner als 2,44 m, also $F(x) < 2{,}44$ 1

Grenze: Die Höhe ist genau 2,44 m. Gesucht ist x.

$$F(x) = 2{,}44$$
$$\Rightarrow\ -0{,}02x^2 + 0{,}5x = 2{,}44 \quad | -2{,}44$$
$$\Rightarrow\ -0{,}02x^2 + 0{,}5x - 2{,}44 = 0 \quad | :(-0{,}02)$$
$$\Rightarrow\ x^2 - 25x + 122 = 0 \quad | p, q$$

1

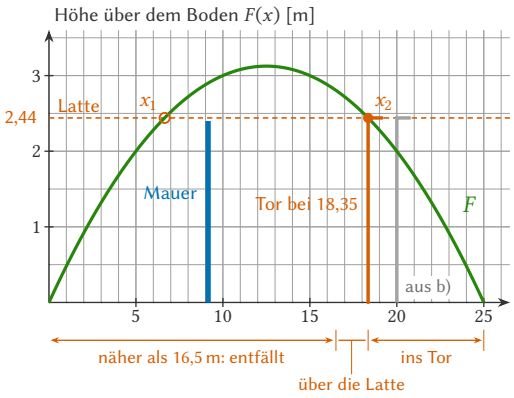
$p = -25,\ q = 122$

$$x_{1,2} = 12{,}5 \pm \sqrt{156{,}25 - 122} = 12{,}5 \pm \sqrt{34{,}25}$$

1

$$\Rightarrow\ x_1 \approx 6{,}65,\ \ x_2 \approx 18{,}35$$

1



$x_1 \approx 6{,}65$ entfällt: Das Tor muss mehr als 16,5 m vom Ball entfernt sein. 1

Testwerte nah an 18,35, links und rechts davon:
$x = 18$: $F(18) = 2{,}52 > 2{,}44$: über der Latte ⇒ kein Tor
$x = 19$: $F(19) = 2{,}28 < 2{,}44$: unter der Latte ⇒ Tor 1

Also gilt $F(x) < 2{,}44$ für $x > 18{,}35$. Das Tor muss mindestens etwa 18,4 m vom Ball entfernt sein. 1

Die Ungleichung $F(x) < 2{,}44$ muss man nicht direkt lösen: Die Gleichung $F(x) = 2{,}44$ liefert die Grenzen, ein Testwert je Seite zeigt, wo der Ball unter der Latte bleibt. Den Testwert nah an der Grenze wählen, damit er keine andere Grenze überspringt (16,5 m, 25 m).

Achtung: Zwischen x_1 und x_2 ist der Ball höher als die Latte, nicht niedriger.

Unter der Achse im Bild: was passiert, wenn das Tor dort steht. Ab 25 m landet der Ball schon vor dem Tor.