Nullstellen ohne Formel

Info 1: Nullstellen

Nullstellen von f sind die speziellen Zahlen x, für die gilt: $f(x) = 0$. Dort trifft der Graph die x-Achse.
Eine quadratische Funktion hat keine, eine oder zwei Nullstellen.
Nullstellen bestimmt man, indem man die Gleichung $f(x) = 0$ löst, z. B. so:

Wurzel ziehen,
wenn nur ein Quadrat und eine Zahl vorkommen:

$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$
$\Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$
$\Rightarrow \quad x = 3 \text{ oder } x = -3$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-3;\ 3\}$

$(x-1)^2 = 4 \quad | \sqrt{}$
$\Rightarrow x - 1 = 2 \text{ oder } x - 1 = -2$
$\Rightarrow \quad x = 3 \text{ oder } x = -1$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-1;\ 3\}$

$x^2 = -4$ hat keine Lösung.
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\ \}$

Produkt gleich null:
Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist:

$(x-2)\cdot(x+5) = 0$
$\Rightarrow x - 2 = 0 \text{ oder } x + 5 = 0$
$\Rightarrow \quad x = 2 \text{ oder } x = -5$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-5;\ 2\}$

Ausklammern,
wenn keine Zahl ohne x vorkommt:

$x^2 - 4x = 0$
$\Rightarrow x\cdot(x-4) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = 4$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{0;\ 4\}$

1 Nullstellen bestimmen

Bestimme die Nullstellen der Funktion.

a) $f(x) = x^2 - 16$

$x^2 - 16 = 0 \quad | + 16$
$\Rightarrow x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$
$\Rightarrow x = 4 \text{ oder } x = -4$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-4;\ 4\}$

b) $f(x) = (x-2)\cdot(x+7)$

$(x-2)\cdot(x+7) = 0$
$\Rightarrow x - 2 = 0 \text{ oder } x + 7 = 0$
$\Rightarrow x = 2 \text{ oder } x = -7$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-7;\ 2\}$

c) $f(x) = 2x^2 - 18$

$2x^2 - 18 = 0 \quad | + 18$
$\Rightarrow 2x^2 = 18 \quad | : 2$
$\Rightarrow x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$
$\Rightarrow x = 3 \text{ oder } x = -3$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3;\ 3\}$

d) $f(x) = x\cdot(x+3)$

$x\cdot(x+3) = 0$
$\Rightarrow x = 0 \text{ oder } x + 3 = 0$
$\Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = -3$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3;\ 0\}$

e) $f(x) = x^2 + 4$

$x^2 + 4 = 0 \quad | - 4$
$\Rightarrow x^2 = -4$
Kein Quadrat ist negativ.
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ \}$

f) $f(x) = (x-3)^2 - 4$

$(x-3)^2 - 4 = 0 \quad | + 4$
$\Rightarrow (x-3)^2 = 4 \quad | \sqrt{}$
$\Rightarrow x - 3 = 2 \text{ oder } x - 3 = -2$
$\Rightarrow x = 5 \text{ oder } x = 1$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{1;\ 5\}$

g) $f(x) = x^2 - 5x$

$x^2 - 5x = 0$
$\Rightarrow x\cdot(x-5) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = 5$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{0;\ 5\}$

h) $f(x) = 3x^2 + 12x$

$3x^2 + 12x = 0$
$\Rightarrow 3x\cdot(x+4) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = -4$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-4;\ 0\}$

i) $f(x) = -0{,}5x^2 + 12{,}5$

$-0{,}5x^2 + 12{,}5 = 0 \quad | - 12{,}5$
$\Rightarrow -0{,}5x^2 = -12{,}5 \quad | : (-0{,}5)$
$\Rightarrow x^2 = 25 \quad | \sqrt{}$
$\Rightarrow x = 5 \text{ oder } x = -5$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-5;\ 5\}$

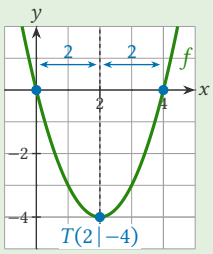
CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Info 2: Hoch- & Tiefpunkt

Die Parabel ist symmetrisch. Deshalb liegt ihr Hoch- oder Tiefpunkt genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 4x$ hat die Nullstellen 0 und 4. Die Mitte ist $x = 2$.

Den y-Wert des Hoch- oder Tiefpunkts erhält man, indem man diese Stelle in die Funktion einsetzt:
$f(2) = 4 - 8 = -4$. Der Tiefpunkt ist $T(2\,|\,-4)$.



2 Hochpunkt oder Tiefpunkt

Bestimme die Nullstellen und den Hoch- oder Tiefpunkt.

a) $f(x) = x^2 - 6x$

$x^2 - 6x = 0$
$\Rightarrow x \cdot (x - 6) = 0$
$\Rightarrow x = 0$ oder $x = 6$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{0;\ 6\}$
Mitte: $x = 3$
$\Rightarrow f(3) = 9 - 18 = -9$
Tiefpunkt $T(3\,|\,-9)$

b) $g(x) = -2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5)$

$-2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) = 0$
$\Rightarrow x - 1 = 0$ oder $x - 5 = 0$
$\Rightarrow x = 1$ oder $x = 5$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{1;\ 5\}$
Mitte: $x = 3$
$\Rightarrow g(3) = -2 \cdot 2 \cdot (-2) = 8$
Hochpunkt $H(3\,|\,8)$

c) $h(x) = x^2 - 4$

$x^2 - 4 = 0 \quad | + 4$
$\Rightarrow x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$
$\Rightarrow x = 2$ oder $x = -2$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-2;\ 2\}$
Mitte: $x = 0$
$\Rightarrow h(0) = -4$
Tiefpunkt $T(0\,|\,-4)$

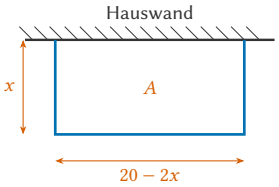
3 Das Hühnergehege

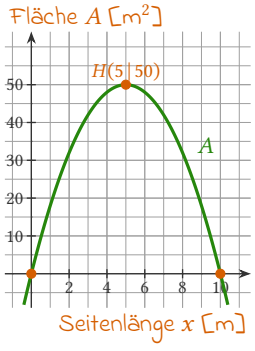
Ein rechteckiges Hühnergehege soll direkt an einer Hauswand liegen. An der Hauswand braucht man keinen Zaun. Für die anderen drei Seiten gibt es 20 m Zaun.

Bestimme rechnerisch, wie lang die Seiten sein müssen, damit die Hühner möglichst viel Platz haben.

Hilfe: Erstelle eine Skizze vom Gehege. Lege fest, was die Variable x bedeuten soll. Nutze keine weiteren Variablen.

x: Seite quer zur Wand (zweimal)
$20 - 2x$: Seite an der Wand gegenüber
Fläche: $A(x) = x \cdot (20 - 2x)$
Nullstellen: $x \cdot (20 - 2x) = 0$
$\Rightarrow x = 0$ oder $20 - 2x = 0$
$\Rightarrow x = 0$ oder $x = 10$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{0;\ 10\}$
Bei $x = 0$ und $x = 10$ ist die Fläche 0.
Mitte: $x = 5$
$\Rightarrow A(5) = 5 \cdot 10 = 50$
Die Seiten sind 5 m, 10 m und 5 m lang.
Die Fläche ist 50 m².





4 Wie viele Nullstellen?

Die Graphen von $f(x) = x^2 + c$ entstehen aus der Normalparabel. Für welche Werte von c hat f keine, genau eine oder zwei Nullstellen? Begründe.

$c < 0$: Parabel nach unten verschoben, zwei Nullstellen.
$c = 0$: Normalparabel, genau eine Nullstelle ($x = 0$).
$c > 0$: Parabel nach oben verschoben, keine Nullstelle.

5 Der Anhalteweg

In der Fahrschule lernst du zwei Faustformeln. Dabei ist v die Geschwindigkeit in km/h. Der Anhalteweg ist die Summe aus Reaktionsweg und Bremsweg.

Reaktionsweg in Metern: $\frac{v}{10} \cdot 3$ Bremsweg in Metern: $\frac{v}{10} \cdot \frac{v}{10}$

a) Ab welcher Geschwindigkeit ist der Bremsweg länger als der Reaktionsweg?

Bremsweg und Reaktionsweg sind gleich lang:

$$\frac{v}{10} \cdot \frac{v}{10} = \frac{v}{10} \cdot 3$$
$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{100} = \frac{3v}{10} \quad | \cdot 100$$
$$\Rightarrow \quad v^2 = 30v \quad | - 30v$$
$$\Rightarrow \quad v^2 - 30v = 0$$
$$\Rightarrow \quad v \cdot (v - 30) = 0$$
$$\Rightarrow \quad v = 0 \quad \text{oder} \quad v = 30$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{0;\ 30\}$$

Bei $v = 0$ steht das Auto. Probe mit 50 km/h: Bremsweg 25 m, Reaktionsweg 15 m.
Ab 30 km/h ist der Bremsweg länger als der Reaktionsweg.

b) Tom sagt: „Wer doppelt so schnell fährt, hat einen doppelt so langen Anhalteweg." Hat Tom recht? Begründe.

50 km/h: $15\,\text{m} + 25\,\text{m} = 40\,\text{m}$. 100 km/h: $30\,\text{m} + 100\,\text{m} = 130\,\text{m}$.
130 m ist mehr als das Dreifache von 40 m. Tom hat nicht recht.
Der Bremsweg wächst quadratisch: Bei doppelter Geschwindigkeit wird er viermal so lang.

c) Auf nasser Straße ist der Bremsweg doppelt so lang. Wie ändert sich deine Antwort aus a)?

$$2 \cdot \frac{v^2}{100} = \frac{3v}{10} \quad | \cdot 100$$
$$\Rightarrow \quad 2v^2 = 30v \quad | - 30v$$
$$\Rightarrow \quad 2v^2 - 30v = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2v \cdot (v - 15) = 0$$
$$\Rightarrow \quad v = 0 \quad \text{oder} \quad v = 15$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{0;\ 15\}$$

Auf nasser Straße ist der Bremsweg schon ab 15 km/h länger.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Rechentraining

Info 3: Ausklammern und Rechnen mit Parametern

Ausklammern

Ein Faktor, der in jedem Summanden steckt, kommt vor die Klammer.

$6x^2 - 15x = 3x \cdot 2x - 3x \cdot 5$
$= 3x \cdot (2x - 5)$

Probe: Ausmultiplizieren ergibt wieder $6x^2 - 15x$.

Steckt in einem Summanden kein x, kann nur eine Zahl vor die Klammer.

Parameter

Ein Parameter wie t steht für eine feste Zahl, die man nicht kennt. Für t gelten dieselben Rechenregeln wie für jede andere Zahl.

Beispiel 1: $2t \cdot x + 6t = 2t \cdot (x + 3)$

Beispiel 2:
$x^2 - t^2 = 0 \quad | + t^2$
$\Rightarrow x^2 = t^2 \quad | \sqrt{}$
$\Rightarrow x = t \quad \text{oder} \quad x = -t$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-t;\ t\}$

6 Ausklammern

Klammere so weit wie möglich aus.

a) $x^2 - 7x$

$= x \cdot x - x \cdot 7$

$= x \cdot (x - 7)$

b) $6x^2 - 9x$

$= 3x \cdot 2x - 3x \cdot 3$

$= 3x \cdot (2x - 3)$

c) $-2x^2 + 10tx$

$= -2x \cdot x + (-2x) \cdot (-5t)$

$= -2x \cdot (x - 5t)$

d) $x^2 + 3x + 4tx$

$= x \cdot x + x \cdot 3 + x \cdot 4t$

$= x \cdot (x + 3 + 4t)$

e) $3x^2 + 6x + 9$

$= 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 3$

$= 3 \cdot (x^2 + 2x + 3)$

In 9 steckt kein x.

f) $x^2 + 4$

In x^2 steckt x, in 4 nicht.

Kein gemeinsamer Faktor:

$x^2 + 4$ bleibt stehen.

7 Gleichungen lösen

Löse nach x auf. Dabei steht t für eine feste Zahl.

a) $x^2 - 9t^2 = 0$

$x^2 - 9t^2 = 0 \quad | + 9t^2$

$\Rightarrow x^2 = 9t^2 \quad | \sqrt{}$

$\Rightarrow x = 3t \quad \text{oder} \quad x = -3t$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3t;\ 3t\}$

b) $x^2 + tx = 0$

$x^2 + tx = 0$

$\Rightarrow x \cdot (x + t) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -t$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-t;\ 0\}$

c) $(x - t) \cdot (x + 4) = 0$

$(x - t) \cdot (x + 4) = 0$

$\Rightarrow x - t = 0 \quad \text{oder} \quad x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = t \quad \text{oder} \quad x = -4$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-4;\ t\}$

d) $(x - t)^2 = 9$

$(x - t)^2 = 9 \quad | \sqrt{}$

$\Rightarrow x - t = 3 \quad \text{oder} \quad x - t = -3$

$\Rightarrow x = t + 3 \quad \text{oder} \quad x = t - 3$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{t - 3;\ t + 3\}$

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul