Nullstellen ohne Formel

Info 1: Nullstellen

Nullstellen von f sind die speziellen Zahlen x, für die gilt: $f(x) = 0$. Dort trifft der Graph die x-Achse.
Eine quadratische Funktion hat keine, eine oder zwei Nullstellen.
Nullstellen bestimmt man, indem man die Gleichung $f(x) = 0$ löst, z. B. so:

Wurzel ziehen,
wenn nur ein Quadrat und eine Zahl vorkommen:

$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$
$\Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$
$\Rightarrow \quad x = 3 \text{ oder } x = -3$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-3;\ 3\}$

$(x-1)^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$
$\Rightarrow x - 1 = 2 \text{ oder } x - 1 = -2$
$\Rightarrow \quad x = 3 \text{ oder } x = -1$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-1;\ 3\}$

$x^2 = -4$ hat keine Lösung.
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\ \}$

Produkt gleich null:
Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist:

$(x-2)\cdot(x+5) = 0$
$\Rightarrow x - 2 = 0 \text{ oder } x + 5 = 0$
$\Rightarrow \quad x = 2 \text{ oder } x = -5$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-5;\ 2\}$

Ausklammern,
wenn keine Zahl ohne x vorkommt:

$x^2 - 4x = 0$
$\Rightarrow x\cdot(x-4) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = 4$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{0;\ 4\}$

1 Nullstellen bestimmen

Bestimme die Nullstellen der Funktion.

a) $f(x) = x^2 - 16$

b) $f(x) = (x-2)\cdot(x+7)$

c) $f(x) = 2x^2 - 18$

d) $f(x) = x\cdot(x+3)$

e) $f(x) = x^2 + 4$

f) $f(x) = (x-3)^2 - 4$

g) $f(x) = x^2 - 5x$

h) $f(x) = 3x^2 + 12x$

i) $f(x) = -0{,}5x^2 + 12{,}5$

GeoGebra: Gib z. B. `f(x)=-0.5x^2+12.5` ein (Punkt statt Komma), dann `Nullstelle(f)`.

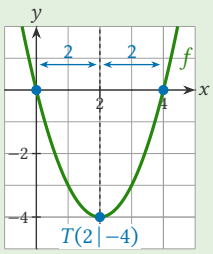
CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Info 2: Hoch- & Tiefpunkt

Die Parabel ist symmetrisch. Deshalb liegt ihr Hoch- oder Tiefpunkt genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 4x$ hat die Nullstellen 0 und 4. Die Mitte ist $x = 2$.

Den y-Wert des Hoch- oder Tiefpunkts erhält man, indem man diese Stelle in die Funktion einsetzt:
$f(2) = 4 - 8 = -4$. Der Tiefpunkt ist $T(2\,|\,-4)$.



2 Hochpunkt oder Tiefpunkt

Bestimme die Nullstellen und den Hoch- oder Tiefpunkt.

a) $f(x) = x^2 - 6x$

b) $g(x) = -2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5)$

c) $h(x) = x^2 - 4$

3 Das Hühnergehege

Ein rechteckiges Hühnergehege soll direkt an einer Hauswand liegen. An der Hauswand braucht man keinen Zaun. Für die anderen drei Seiten gibt es 20 m Zaun.

Bestimme rechnerisch, wie lang die Seiten sein müssen, damit die Hühner möglichst viel Platz haben.

Hilfe: Erstelle eine Skizze vom Gehege. Lege fest, was die Variable x bedeuten soll. Nutze keine weiteren Variablen.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

4 Wie viele Nullstellen?

Die Graphen von $f(x) = x^2 + c$ entstehen aus der Normalparabel. Für welche Werte von c hat f keine, genau eine oder zwei Nullstellen? Begründe.

5 Der Anhalteweg

In der Fahrschule lernst du zwei Faustformeln. Dabei ist v die Geschwindigkeit in km/h. Der Anhalteweg ist die Summe aus Reaktionsweg und Bremsweg.

Reaktionsweg in Metern: $\frac{v}{10} \cdot 3$ Bremsweg in Metern: $\frac{v}{10} \cdot \frac{v}{10}$

a) Ab welcher Geschwindigkeit ist der Bremsweg länger als der Reaktionsweg?

b) Tom sagt: „Wer doppelt so schnell fährt, hat einen doppelt so langen Anhalteweg.“ Hat Tom recht? Begründe.

c) Auf nasser Straße ist der Bremsweg doppelt so lang. Wie ändert sich deine Antwort aus a)?

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Rechentraining

Info 3: Ausklammern und Rechnen mit Parametern

Ausklammern

Ein Faktor, der in jedem Summanden steckt, kommt vor die Klammer.

$6x^2 - 15x = 3x \cdot 2x - 3x \cdot 5$
$= 3x \cdot (2x - 5)$

Probe: Ausmultiplizieren ergibt wieder $6x^2 - 15x$.

Steckt in einem Summanden kein x, kann nur eine Zahl vor die Klammer.

Parameter

Ein Parameter wie t steht für eine feste Zahl, die man nicht kennt. Für t gelten dieselben Rechenregeln wie für jede andere Zahl.

Beispiel 1: $2t \cdot x + 6t = 2t \cdot (x + 3)$

Beispiel 2:
$x^2 - t^2 = 0 \quad | + t^2$
$\Rightarrow x^2 = t^2 \quad | \sqrt{\ }$
$\Rightarrow x = t \quad$ oder $\quad x = -t$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-t;\ t\}$

6 Ausklammern

Klammere so weit wie möglich aus.

a) $x^2 - 7x$

c) $-2x^2 + 10tx$

e) $3x^2 + 6x + 9$

b) $6x^2 - 9x$

d) $x^2 + 3x + 4tx$

f) $x^2 + 4$

Kontrollergebnisse: $x \cdot (x - 7)$ $\quad x \cdot (x + 3 + 4t)$ $\quad x^2 + 4$ $\quad -2x \cdot (x - 5t)$ $\quad 3x \cdot (2x - 3)$ $\quad 3 \cdot (x^2 + 2x + 3)$

7 Gleichungen lösen

Löse nach x auf. Dabei steht t für eine feste Zahl.

a) $x^2 - 9t^2 = 0$

c) $(x - t) \cdot (x + 4) = 0$

b) $x^2 + tx = 0$

d) $(x - t)^2 = 9$

Kontrollergebnisse: $\mathbb{L} = \{-t;\ 0\}$ $\quad \mathbb{L} = \{-4;\ t\}$ $\quad \mathbb{L} = \{-3t;\ 3t\}$ $\quad \mathbb{L} = \{t - 3;\ t + 3\}$

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul