Nullstellen bestimmen die Funktion

1 Die Wunschparabel

Gesucht ist eine quadratische Funktion f mit den Nullstellen 1 und 4.

a) Gib einen passenden Funktionsterm an. Prüfe ihn durch Einsetzen.

Ein Produkt ist null, wenn ein Faktor null ist. Also Klammern, die bei 1 und 4 null werden:
z. B. $f(x) = (x-1)\cdot(x-4)$
Probe: $f(1) = 0\cdot(-3) = 0$ und $f(4) = 3\cdot 0 = 0$

b) Gib eine andere quadratische Funktion g mit denselben Nullstellen an.

z. B. $g(x) = 2\cdot(x-1)\cdot(x-4)$ oder $g(x) = -(x-1)\cdot(x-4)$
Eine Zahl vor dem Produkt ändert die Nullstellen nicht.

c) Gib eine quadratische Funktion h mit den Nullstellen -2 und 3 an. Prüfe auch sie.

z. B. $h(x) = (x+2)\cdot(x-3)$
Probe: $h(-2) = 0\cdot(-5) = 0$ und $h(3) = 5\cdot 0 = 0$
Achtung: Zu -2 gehört $(x+2)$, nicht $(x-2)$.

d) Gibt es eine quadratische Funktion k, die nur die Nullstelle 2 hat?

Ja, z. B. $k(x) = (x-2)^2 = (x-2)\cdot(x-2)$.
Beide Klammern werden nur bei 2 null.

Info 1: Linearfaktorform

Die Funktion $f(x) = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ hat die Nullstellen x_1 und x_2: Setzt man x_1 oder x_2 ein, wird jeweils eine der Klammern null und damit das ganze Produkt.

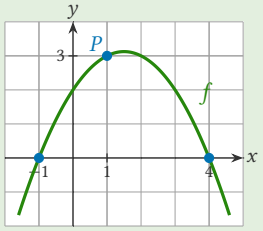
Diese Schreibweise heißt **Linearfaktorform**, die Klammern heißen **Linearfaktoren**. Ausmultipliziert ergibt sie die allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit demselben a.

Term aus Nullstellen und einem Punkt

1. Nullstellen ablesen und einsetzen: $f(x) = a\cdot(x+1)\cdot(x-4)$
2. Einen weiteren Punkt ablesen, z. B. $P(1\,|\,3)$:

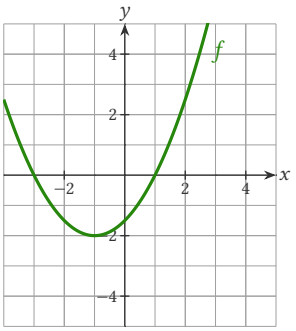
$$\begin{aligned} & f(1) = 3 \\ \Rightarrow\ & a\cdot(1+1)\cdot(1-4) = 3 \\ \Rightarrow\ & -6a = 3 \quad | : (-6) \\ \Rightarrow\ & a = -0{,}5 \end{aligned}$$

3. Damit ergibt sich die Funktionsgleichung
$f(x) = -0{,}5\cdot(x+1)\cdot(x-4)$.

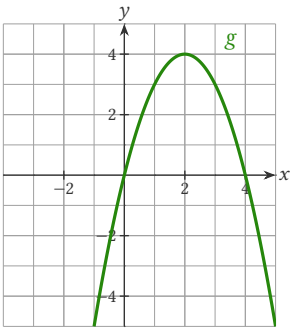


2 Vom Graphen zum Term

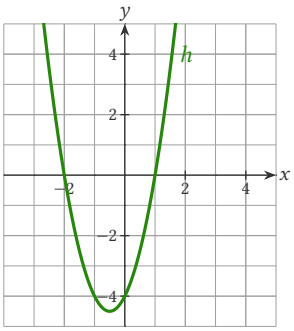
Bestimme zu jedem Graphen den Funktionsterm in Linearfaktorform. Berechne zur Kontrolle mit deinem Term den Funktionswert an der Stelle 6.



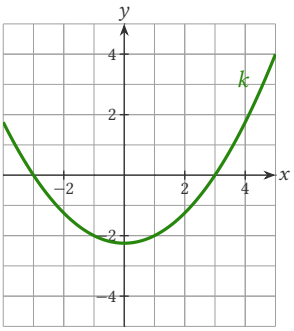
$f(x) = a\cdot(x+3)\cdot(x-1)$
$f(-1) = -2$
$\Rightarrow a\cdot 2\cdot(-2) = -2$
$\Rightarrow -4a = -2 \quad | : (-4)$
$\Rightarrow a = 0{,}5$
$f(x) = 0{,}5\cdot(x+3)\cdot(x-1)$
$f(6) = 0{,}5\cdot 9\cdot 5 = 22{,}5$



$g(x) = a\cdot x\cdot(x-4)$
$g(2) = 4$
$\Rightarrow a\cdot 2\cdot(-2) = 4$
$\Rightarrow -4a = 4 \quad | : (-4)$
$\Rightarrow a = -1$
$g(x) = -x\cdot(x-4)$
$g(6) = -6\cdot 2 = -12$



$h(x) = a\cdot(x+2)\cdot(x-1)$
$h(0) = -4$
$\Rightarrow a\cdot 2\cdot(-1) = -4$
$\Rightarrow -2a = -4 \quad | : (-2)$
$\Rightarrow a = 2$
$h(x) = 2\cdot(x+2)\cdot(x-1)$
$h(6) = 2\cdot 8\cdot 5 = 80$



$k(x) = a\cdot(x+3)\cdot(x-3)$
$k(1) = -2$
$\Rightarrow a\cdot 4\cdot(-2) = -2$
$\Rightarrow -8a = -2 \quad | : (-8)$
$\Rightarrow a = 0{,}25$
$k(x) = 0{,}25\cdot(x+3)\cdot(x-3)$
$k(6) = 0{,}25\cdot 9\cdot 3 = 6{,}75$

3 Nullstellen vorgegeben

Gib den Funktionsterm in Linearfaktorform an. Berechne zur Kontrolle den Funktionswert an der Stelle 4.

a) Nullstellen -4 und 1, der Graph geht durch $(-2\,|\,12)$

$f(x) = a\cdot(x+4)\cdot(x-1)$
$f(-2) = 12$
$\Rightarrow a\cdot 2\cdot(-3) = 12$
$\Rightarrow -6a = 12 \quad | : (-6)$
$\Rightarrow a = -2$
$f(x) = -2\cdot(x+4)\cdot(x-1)$
$f(4) = -2\cdot 8\cdot 3 = -48$

b) Nullstellen 0 und 6, der Hochpunkt liegt bei $y = 4{,}5$

$g(x) = a\cdot x\cdot(x-6)$
Mitte $x = 3$: $g(3) = 4{,}5$
$\Rightarrow a\cdot 3\cdot(-3) = 4{,}5$
$\Rightarrow -9a = 4{,}5 \quad | : (-9)$
$\Rightarrow a = -0{,}5$
$g(x) = -0{,}5\cdot x\cdot(x-6)$
$g(4) = -0{,}5\cdot 4\cdot(-2) = 4$

c) Nullstellen 2 und 8, der y-Achsenabschnitt ist 4

$h(x) = a\cdot(x-2)\cdot(x-8)$
$h(0) = 4$
$\Rightarrow a\cdot(-2)\cdot(-8) = 4$
$\Rightarrow 16a = 4 \quad | : 16$
$\Rightarrow a = 0{,}25$
$h(x) = 0{,}25\cdot(x-2)\cdot(x-8)$
$h(4) = 0{,}25\cdot 2\cdot(-4) = -2$

d) Die Nullstellen sind 1 und 3, und der Graph geht durch $(2\,|\,0)$. Gibt es eine solche quadratische Funktion?

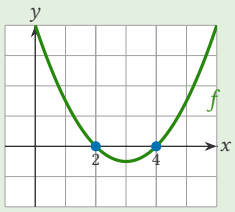
$f(x) = a\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ und $f(2) = 0$
$\Rightarrow a\cdot 1\cdot(-1) = 0$
$\Rightarrow a = 0$: Dann ist $f(x) = 0$, das ist keine Parabel. Also nein.
Eine Parabel hat höchstens zwei Nullstellen, $(2\,|\,0)$ wäre eine dritte.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Info 2: Vielfachheit

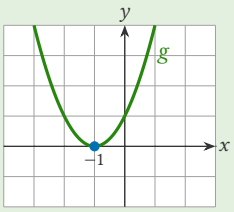
Kommt ein Linearfaktor zweimal vor, ist die Nullstelle **doppelt**: $(x+1)^2 = (x+1)\cdot(x+1)$.
Der Exponent des Linearfaktors heißt **Vielfachheit** der Nullstelle.

Von der allgemeinen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ zur Linearfaktorform: erst die Nullstellen bestimmen, dann $f(x) = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ aufschreiben. Das a ist in beiden Formen dieselbe Zahl.



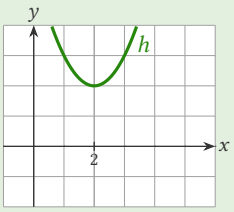
$f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$
$= 0{,}5\cdot(x-2)\cdot(x-4)$

Zwei einfache Nullstellen: Der Graph schneidet die x-Achse.



$g(x) = x^2 + 2x + 1$
$= (x+1)^2$

Eine doppelte Nullstelle: Der Graph berührt die x-Achse. Dort liegt der Tief- oder Hochpunkt.



$h(x) = x^2 - 4x + 6$
$= \lightning$

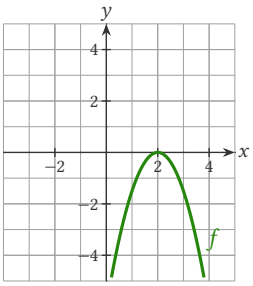
Eine Linearfaktorform gibt es nicht, da es keine Nullstellen gibt.

4 Schneiden oder berühren?

Bestimme die Nullstellen und ihre Vielfachheit. Skizziere den Graphen.

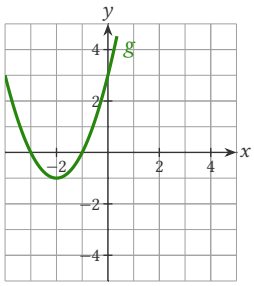
a) $f(x) = -1{,}5\cdot(x-2)^2$

Linearfaktor $(x-2)^2$: Nullstelle 2, doppelt. Der Graph berührt die x-Achse im Hochpunkt $(2\,|\,0)$.



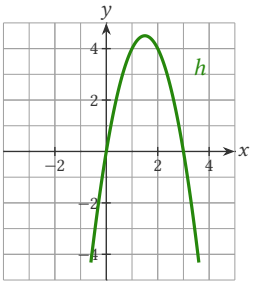
b) $g(x) = x^2 + 4x + 3$

$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad | \; p, q$
$\Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{4 - 3}$
$\Rightarrow x_1 = -3, \quad x_2 = -1$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3;\ -1\}$
beide einfach: schneidet



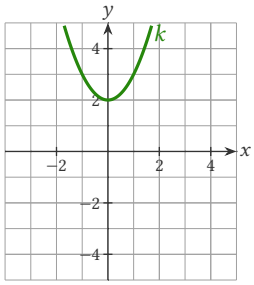
c) $h(x) = -2x^2 + 6x$

$-2x^2 + 6x = 0$
$\Rightarrow -2x\cdot(x-3) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 3$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{0;\ 3\}$
beide einfach: schneidet



d) $k(x) = x^2 + 2$

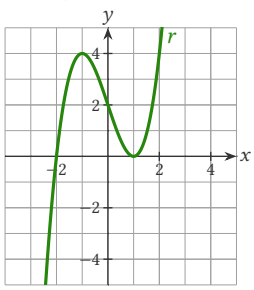
$x^2 + 2 = 0 \quad | -2$
$\Rightarrow x^2 = -2$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\,\}$
keine Nullstelle: Der Graph trifft die x-Achse nicht.



e) Ausblick: $r(x) = (x+2)\cdot(x-1)^2$ ist eine Polynomfunktion dritten Grades. Wo schneidet, wo berührt ihr Graph die x-Achse?

-2 ist einfach: Dort schneidet der Graph die x-Achse.
1 ist doppelt: Dort berührt der Graph die x-Achse.

Ausmultipliziert ist $r(x) = x^3 - 3x + 2$. Der höchste Exponent ist 3, deshalb ist r eine Polynomfunktion dritten Grades.



CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

5 Der Foodtruck

Ein Foodtruck verkauft Burger. Im Einkauf kostet ihn ein Burger 3 €. Bei einem Preis von 10 € verkauft er am Tag 100 Burger. Jeder Euro mehr beim Preis bedeutet 10 verkaufte Burger weniger, jeder Euro weniger 10 Burger mehr. Die Gewinnfunktion $G(x)$ gibt an, wie viel Gewinn der Foodtruck am Tag bei einem Preis von x Euro macht.

a) Fülle die Spalten für 9 € bis 13 € aus.

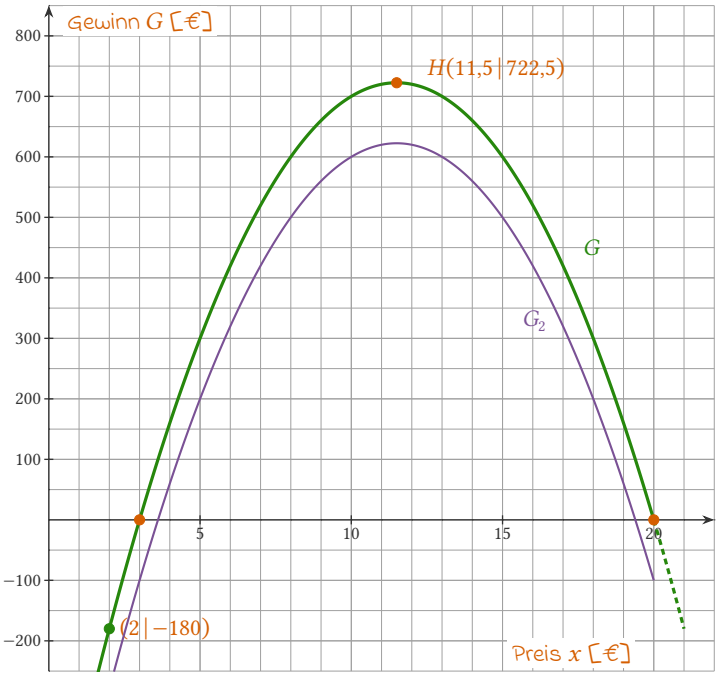
Preis in €	9	10	11	12	13	x
Gewinn je Burger in €	6	7	8	9	10	$x-3$
Preisänderung zu 10 €	-1	0	1	2	3	$x-10$
Anzahl der Burger	110	100	90	80	70	$100-10\cdot(x-10)=200-10x$
Gewinn am Tag in €	660	700	720	720	700	$G(x)=(x-3)\cdot(200-10x)$

b) Fülle die Spalte x aus: Stelle die Terme für einen beliebigen Preis x auf, also in Abhängigkeit von x. Prüfe deine Terme mit einem konkreten Wert aus der Tabelle.

Probe mit 9: $9-3=6$, $9-10=-1$, $200-10\cdot 9=110$, $G(9)=6\cdot 110=660$
In Linearfaktorform: $G(x)=-10\cdot(x-3)\cdot(x-20)$, nach unten geöffnet.

c) Bei welchen Preisen macht der Foodtruck keinen Gewinn? Was passiert bei diesen Preisen?

$G(x)=0$
$\Rightarrow x-3=0$ oder $200-10x=0$
$\Rightarrow x_1=3,\ x_2=20$
$\Rightarrow \mathbb{L}=\{3;\ 20\}$
Bei 3 € verdient er an keinem Burger etwas.
Bei 20 € kauft niemand mehr einen Burger.
Unter 3 € Verlust, etwa $G(2)=-180$ (Punkt im Bild).



d) Bei welchem Preis macht der Foodtruck den größten Gewinn? Wie groß ist er?

Mitte der Nullstellen: $x=\frac{3+20}{2}=11{,}5$
$G(11{,}5)=8{,}5\cdot 85=722{,}5$: $H(11{,}5\,|\,722{,}5)$
Bei 11,50 € verkauft er 85 Burger, Gewinn 722,50 €.
Auch die Tabelle: $G(11)=G(12)=720$, Mitte 11,5.

e) Zeichne den Graphen von G in das Koordinatensystem. Beschrifte beide Achsen.

f) Die Stadt verlangt ab sofort eine Standgebühr von 100 € am Tag. Muss der Foodtruck seinen Preis ändern?

Nein. Die Gebühr fällt bei jedem Preis an: Der Gewinn ist überall 100 € kleiner, der Graph rückt um 100 nach unten (G_2).
Der beste Preis bleibt 11,50 €, der größte Gewinn sinkt auf 622,50 €.

Info 3: Parabel und Gerade

So findest du die gemeinsamen Punkte einer Parabel f und einer Geraden g:

1. Die Funktionsterme gleichsetzen: $f(x) = g(x)$.
2. Alles auf eine Seite bringen, sodass auf der anderen 0 steht.
3. Die quadratische Gleichung lösen.
4. Die Lösungen in f oder g einsetzen.

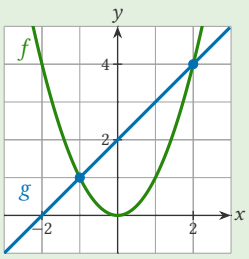
Beispiel 1

$f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 2$

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 2 && | -x-2 \\ \Rightarrow\ x^2 - x - 2 &= 0 && | p,q \\ \Rightarrow\ x &= 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2} \\ \Rightarrow\ x_1 &= -1, \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ y-Werte: $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$ $\Rightarrow$ $S_1(-1\,|\,1)$, $S_2(2\,|\,4)$

Zwei Lösungen: Die Gerade schneidet die Parabel. Sie heißt **Sekante**.

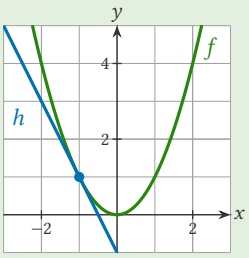


Beispiel 2

$f(x) = x^2$

$h(x) = -2x - 1$

Eine (doppelte) Lösung: Die Gerade berührt die Parabel. Sie heißt **Tangente**.

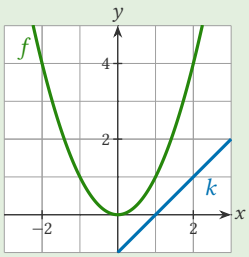


Beispiel 3

$f(x) = x^2$

$k(x) = x - 1$

Keine Lösung: Es gibt keinen gemeinsamen Punkt.



6 Parabel trifft Gerade

Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Bestimme die gemeinsamen Punkte von f mit der Geraden. Wie liegt die Gerade zur Parabel?

a) $g(x) = x + 1$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= x + 1 && | -x-1 \\ \Rightarrow\ x^2 - 3x - 4 &= 0 && | p,q \\ \Rightarrow\ x &= 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4} \\ \Rightarrow\ x &= 1{,}5 \pm 2{,}5 \\ \Rightarrow\ x_1 &= -1, \quad x_2 = 4 \\ \Rightarrow\ \mathbb{L} &= \{-1;\ 4\} \end{aligned}$$

$g(-1) = 0$, $g(4) = 5$: $S_1(-1\,|\,0)$, $S_2(4\,|\,5)$

Zwei Lösungen: g ist eine Sekante.

b) $h(x) = -x - 6$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= -x - 6 && | +x+6 \\ \Rightarrow\ x^2 - x + 3 &= 0 && | p,q \\ \Rightarrow\ x &= 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 3} \\ \Rightarrow\ x &= 0{,}5 \pm \sqrt{-2{,}75} \\ \Rightarrow\ \mathbb{L} &= \{\,\} \end{aligned}$$

Keine Lösung: kein gemeinsamer Punkt.

c) $k(x) = 2x - 7$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 2x - 7 && | -2x+7 \\ \Rightarrow\ x^2 - 4x + 4 &= 0 && | p,q \\ \Rightarrow\ x &= 2 \pm \sqrt{4 - 4} \\ \Rightarrow\ x &= 2 \end{aligned}$$

$k(2) = -3$: $B(2\,|\,-3)$

Eine (doppelte) Lösung: k ist eine Tangente. Schneller: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul