Nullstellen bestimmen die Funktion

1 Die Wunschparabel

Gesucht ist eine quadratische Funktion f mit den Nullstellen 1 und 4.

a) Gib einen passenden Funktionsterm an. Prüfe ihn durch Einsetzen.

b) Gib eine andere quadratische Funktion g mit denselben Nullstellen an.

c) Gib eine quadratische Funktion h mit den Nullstellen -2 und 3 an. Prüfe auch sie.

d) Gibt es eine quadratische Funktion k, die nur die Nullstelle 2 hat?

Info 1: Linearfaktorform

Die Funktion $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ hat die Nullstellen x_1 und x_2: Setzt man x_1 oder x_2 ein, wird jeweils eine der Klammern null und damit das ganze Produkt.

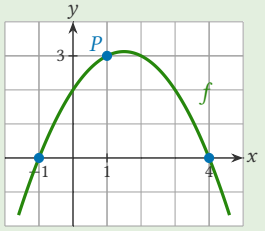
Diese Schreibweise heißt **Linearfaktorform**, die Klammern heißen **Linearfaktoren**. Ausmultipliziert ergibt sie die allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit demselben a.

Term aus Nullstellen und einem Punkt

1. Nullstellen ablesen und einsetzen: $f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)$
2. Einen weiteren Punkt ablesen, z. B. $P(1\,|\,3)$:

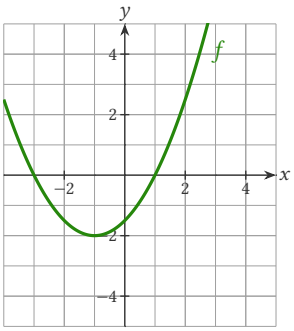
$$\begin{aligned} & f(1) = 3 \\ \Rightarrow\ & a \cdot (1 + 1) \cdot (1 - 4) = 3 \\ \Rightarrow\ & -6a = 3 \quad | : (-6) \\ \Rightarrow\ & a = -0{,}5 \end{aligned}$$

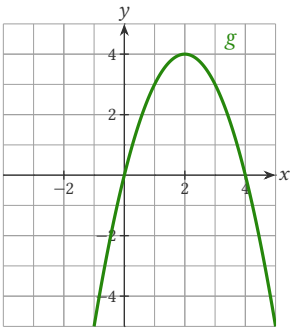
3. Damit ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}5 \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)$.

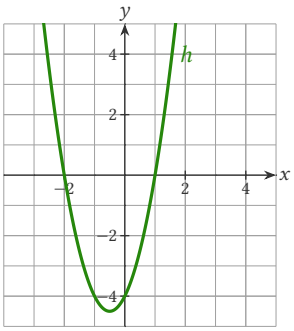


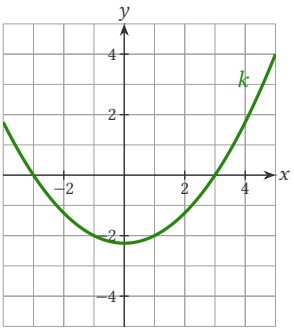
2 Vom Graphen zum Term

Bestimme zu jedem Graphen den Funktionsterm in Linearfaktorform. Berechne zur Kontrolle mit deinem Term den Funktionswert an der Stelle 6.









Kontrollergebnisse:	6,75	−12	22,5	80

3 Nullstellen vorgegeben

Gib den Funktionsterm in Linearfaktorform an. Berechne zur Kontrolle den Funktionswert an der Stelle 4.

a) Nullstellen -4 und 1, der Graph geht durch $(-2\,|\,12)$

b) Nullstellen 0 und 6, der Hochpunkt liegt bei $y = 4{,}5$

c) Nullstellen 2 und 8, der y-Achsenabschnitt ist 4

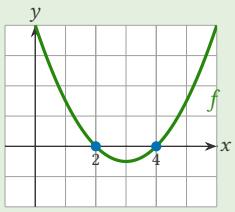
Kontrollergebnisse:	−2	4	−48

d) Die Nullstellen sind 1 und 3, und der Graph geht durch $(2\,|\,0)$. Gibt es eine solche quadratische Funktion?

Info 2: Vielfachheit

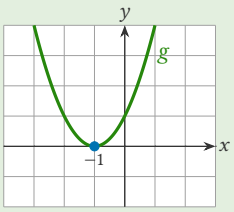
Kommt ein Linearfaktor zweimal vor, ist die Nullstelle **doppelt**: $(x+1)^2 = (x+1)\cdot(x+1)$.
Der Exponent des Linearfaktors heißt **Vielfachheit** der Nullstelle.

Von der allgemeinen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ zur Linearfaktorform: erst die Nullstellen bestimmen, dann $f(x) = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ aufschreiben. Das a ist in beiden Formen dieselbe Zahl.



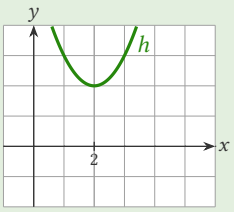
$f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$
$= 0{,}5\cdot(x-2)\cdot(x-4)$

Zwei einfache Nullstellen: Der Graph schneidet die x-Achse.



$g(x) = x^2 + 2x + 1$
$= (x+1)^2$

Eine doppelte Nullstelle: Der Graph berührt die x-Achse. Dort liegt der Tief- oder Hochpunkt.



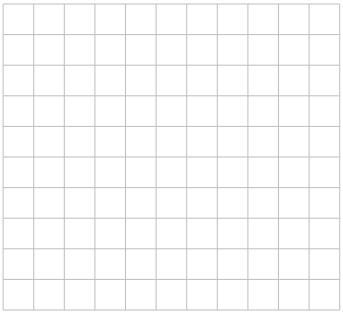
$h(x) = x^2 - 4x + 6$
$= \lightning$

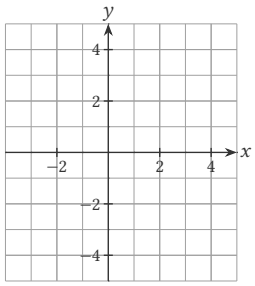
Eine Linearfaktorform gibt es nicht, da es keine Nullstellen gibt.

4 Schneiden oder berühren?

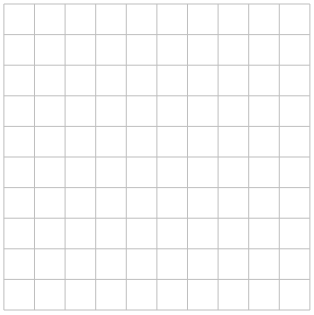
Bestimme die Nullstellen und ihre Vielfachheit. Skizziere den Graphen.

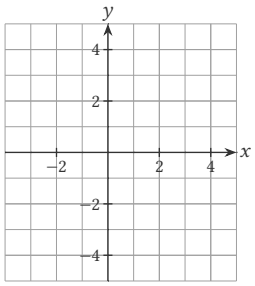
a) $f(x) = -1{,}5\cdot(x-2)^2$



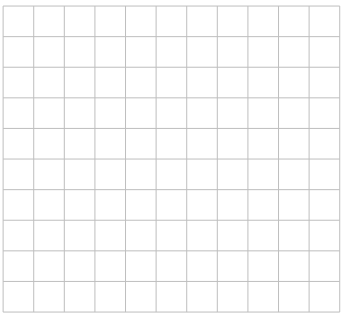


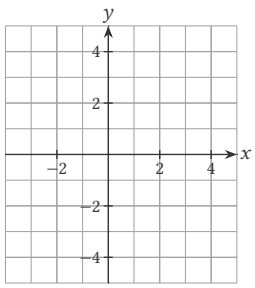
b) $g(x) = x^2 + 4x + 3$



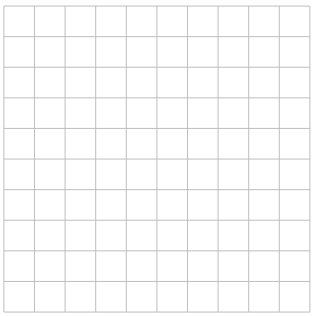


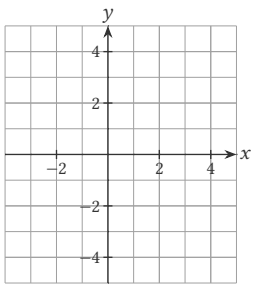
c) $h(x) = -2x^2 + 6x$





d) $k(x) = x^2 + 2$





Kontrollergebnisse: $\mathbb{L} = \{0;\ 3\}$ $x = 2$ $\mathbb{L} = \{-3;\ -1\}$ $\mathbb{L} = \{\ \}$

e) Ausblick: $r(x) = (x+2)\cdot(x-1)^2$ ist eine Polynomfunktion dritten Grades. Wo schneidet, wo berührt ihr Graph die x-Achse?

Kontrolle: Gib die Funktion in GeoGebra ein, etwa `f(x)=-1.5*(x-2)^2`, und vergleiche mit deiner Skizze. GeoGebra erwartet den Dezimalpunkt.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

5 Der Foodtruck

Ein Foodtruck verkauft Burger. Im Einkauf kostet ihn ein Burger 3 €. Bei einem Preis von 10 € verkauft er am Tag 100 Burger. Jeder Euro mehr beim Preis bedeutet 10 verkaufte Burger weniger, jeder Euro weniger 10 Burger mehr. Die Gewinnfunktion $G(x)$ gibt an, wie viel Gewinn der Foodtruck am Tag bei einem Preis von x Euro macht.

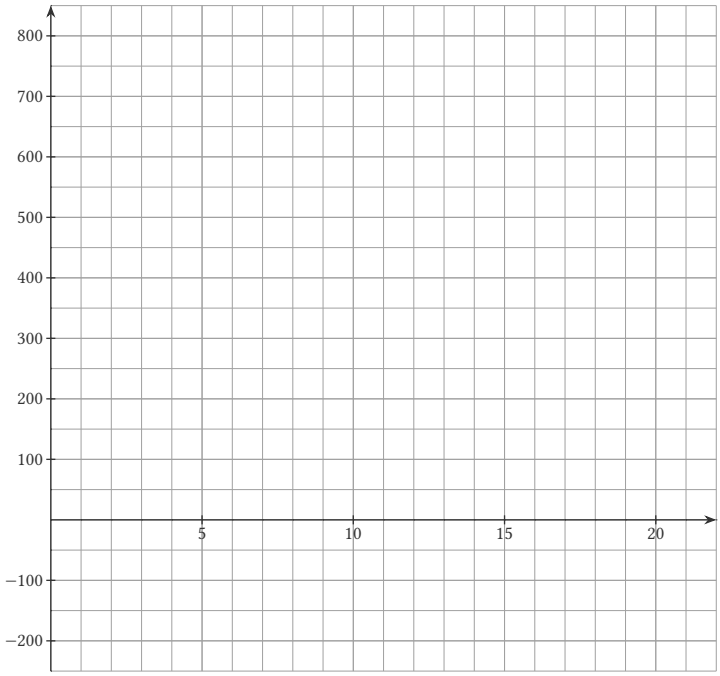
a) Fülle die Spalten für 9 € bis 13 € aus.

Preis in €	9	10	11	12	13	x
Gewinn je Burger in €						
Hilfszeile für die Anzahl (optional)		0				
Anzahl der Burger		100				
Gewinn am Tag in €						

b) Fülle die Spalte x aus: Stelle die Terme für einen beliebigen Preis x auf, also in Abhängigkeit von x. Prüfe deine Terme mit einem konkreten Wert aus der Tabelle.

c) Bei welchen Preisen macht der Foodtruck keinen Gewinn? Was passiert bei diesen Preisen?

d) Bei welchem Preis macht der Foodtruck den größten Gewinn? Wie groß ist er?



e) Zeichne den Graphen von G in das Koordinatensystem. Beschrifte beide Achsen.

f) Die Stadt verlangt ab sofort eine Standgebühr von 100 € am Tag. Muss der Foodtruck seinen Preis ändern?

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Info 3: Parabel und Gerade

So findest du die gemeinsamen Punkte einer Parabel f und einer Geraden g:

1. Die Funktionsterme gleichsetzen: $f(x) = g(x)$.
2. Alles auf eine Seite bringen, sodass auf der anderen 0 steht.
3. Die quadratische Gleichung lösen.
4. Die Lösungen in f oder g einsetzen.

Beispiel 1

$f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 2$

$x^2 = x + 2 \quad | -x-2$

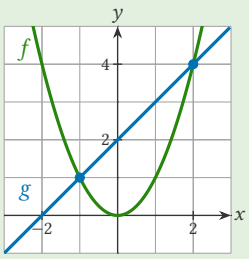
$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad | p,q$

$\Rightarrow x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2}$

$\Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 2$

$\Rightarrow$ y-Werte: $f(-1) = 1, \quad f(2) = 4 \Rightarrow S_1(-1\,|\,1), \quad S_2(2\,|\,4)$

Zwei Lösungen: Die Gerade schneidet die Parabel. Sie heißt **Sekante**.

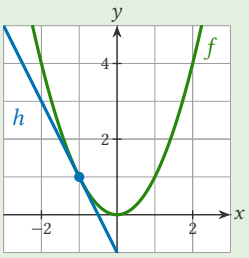


Beispiel 2

$f(x) = x^2$

$h(x) = -2x - 1$

Eine (doppelte) Lösung: Die Gerade berührt die Parabel. Sie heißt **Tangente**.

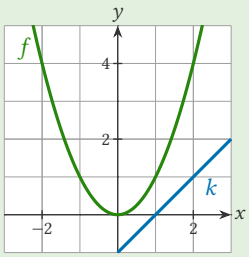


Beispiel 3

$f(x) = x^2$

$k(x) = x - 1$

Keine Lösung: Es gibt keinen gemeinsamen Punkt.



6 Parabel trifft Gerade

Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Bestimme die gemeinsamen Punkte von f mit der Geraden. Wie liegt die Gerade zur Parabel?

a) $g(x) = x + 1$

b) $h(x) = -x - 6$

c) $k(x) = 2x - 7$