Die p,q-Formel

1 Ohne Formel?

a) Löse $x \cdot (x+1) = 0$.

$x \cdot (x+1) = 0$
$\Rightarrow\ x = 0$ oder $x + 1 = 0$
$\Rightarrow\ x = 0$ oder $x = -1$
$\Rightarrow\ \mathbb{L} = \{-1;\ 0\}$

b) Löse $x \cdot (x+1) = 17$ ohne p,q-Formel. Mache die Probe.

Produkt gleich null geht nicht, rechts steht 17, nicht 0.
$x = 17$ oder $x + 1 = 17$? Probe: $17 \cdot 18 = 306$, $16 \cdot 17 = 272$, beides nicht 17.
Wurzel ziehen und Ausklammern führen auch nicht weiter.
Durch Probieren kann man sich der Lösung nur annähern, genau wird es so nicht.
Ohne p,q-Formel lässt sich die Gleichung nicht lösen.
Die beiden Lösungen stehen im Kasten auf Seite 2.

2 Die Formel anwenden

Löse die Gleichung mit der p,q-Formel.

a) $x^2 + 6x + 5 = 0 \quad | \ p, q$

$p = 6,\ q = 5$
$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 5}$
$= -3 \pm 2$
$\Rightarrow\ x_1 = -1,\ x_2 = -5$
$\Rightarrow\ \mathbb{L} = \{-5;\ -1\}$

b) $2x^2 + 12x + 16 = 0 \quad | \ :2$

$\Rightarrow\ x^2 + 6x + 8 = 0 \quad | \ p, q$
$p = 6,\ q = 8$
$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 8}$
$= -3 \pm 1$
$\Rightarrow\ x_1 = -2,\ x_2 = -4$
$\Rightarrow\ \mathbb{L} = \{-4;\ -2\}$

c) $-3x^2 - 18x - 27 = 0 \quad | \ :(-3)$

$\Rightarrow\ x^2 + 6x + 9 = 0 \quad | \ p, q$
$p = 6,\ q = 9$
$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 9}$
$= -3 \pm 0$
$\Rightarrow\ x = -3$ (doppelte Lösung)
$\Rightarrow\ \mathbb{L} = \{-3\}$

d) $5x^2 + 30x + 50 = 0 \quad | \ :5$

$\Rightarrow\ x^2 + 6x + 10 = 0 \quad | \ p, q$
$p = 6,\ q = 10$
$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 10}$
$= -3 \pm \sqrt{-1}$
$\sqrt{-1}$ gibt es nicht.
$\Rightarrow\ \mathbb{L} = \{\ \}$

e) $0{,}5x^2 - 3x - 3{,}5 = 0 \quad | \ :0{,}5$

$\Rightarrow\ x^2 - 6x - 7 = 0 \quad | \ p, q$
$p = -6,\ q = -7$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 7}$
$= 3 \pm 4$
$\Rightarrow\ x_1 = 7,\ x_2 = -1$
$\Rightarrow\ \mathbb{L} = \{-1;\ 7\}$

f) $-x^2 + 6x - 2 = 0 \quad | \ :(-1)$

$\Rightarrow\ x^2 - 6x + 2 = 0 \quad | \ p, q$
$p = -6,\ q = 2$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 2}$
$= 3 \pm \sqrt{7}$
$\Rightarrow\ x_1 = 3 + \sqrt{7},\ x_2 = 3 - \sqrt{7}$
$\Rightarrow\ \mathbb{L} \approx \{0{,}4;\ 5{,}6\}$

g) Vergleiche die Gleichungen und die Lösungsmengen von a) bis d). Was fällt dir auf?

Normiert heißen alle $x^2 + 6x + q$, nur q wächst: 5, 8, 9, 10.
Der Wert unter der Wurzel $9 - q$ wird kleiner: erst zwei Lösungen, dann eine doppelte, dann keine.
Die Mitte der Lösungen bleibt bei $-3 = -\frac{p}{2}$.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Info 1: p,q-Formel

Nicht jede quadratische Gleichung lässt sich mit Wurzel ziehen, Ausklammern oder „Produkt gleich null“ lösen. Dann hilft die **p,q-Formel**. Sie gilt für Gleichungen der Form $x^2 + \boldsymbol{p}x + \boldsymbol{q} = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{\boldsymbol{p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{p}}{2}\right)^2 - \boldsymbol{q}}$$

So geht man vor	Beispiel
Umstellen, bis rechts 0 steht:	$2x^2 - 4x = 6 \quad \mid -6$
Normieren, also durch die Zahl vor x^2 teilen:	$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad \mid :2$
	$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \mid p, q$
$\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ ablesen, mit Vorzeichen:	$\boldsymbol{p = -2}, \quad \boldsymbol{q = -3}$
In die p,q-Formel einsetzen:	$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)}$
	$= 1 \pm \sqrt{1 + 3}$
	$= 1 \pm 2$
	$x_1 = 3, \quad x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-1;\ 3\}$

Tipp: Negative Zahlen beim Quadrieren in Klammern setzen, auch im Taschenrechner: $(-1)^2 = 1$, aber $-1^2 = -1$.

Lösung zu Aufgabe 1 b):

$$\begin{aligned} & x \cdot (x+1) = 17 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + x = 17 \quad \mid -17 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + x - 17 = 0 \quad \mid p, q \\ & \boldsymbol{p = 1}, \quad \boldsymbol{q = -17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-17)} \\ &= -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 17} \\ &= -0{,}5 \pm \sqrt{17{,}25} \\ \Rightarrow \quad x_1 &= -0{,}5 + \sqrt{17{,}25}, \quad x_2 = -0{,}5 - \sqrt{17{,}25} \\ \Rightarrow \quad \mathbb{L} &\approx \{-4{,}65;\ 3{,}65\} \end{aligned}$$

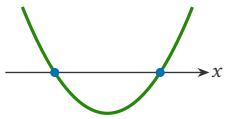
Info 2: Wie viele Lösungen?

Der Wert unter der Wurzel entscheidet: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Die Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + px + q$.

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

zwei Lösungen = zwei Nullstellen



Beispiel

$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \mid p, q$

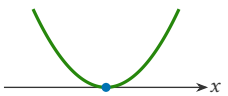
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$

$= 3 \pm 1$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{2;\ 4\}$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

eine Lösung = doppelte Nullstelle, Graph berührt die x-Achse



Beispiel

$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \mid p, q$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 1}$

$= -1 \pm 0$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1\}$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

keine Lösung = keine Nullstelle



Beispiel

$x^2 - 4x + 6 = 0 \quad \mid p, q$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 6}$

$= 2 \pm \sqrt{-2}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ \}$

Info 3: Welcher Rechenweg ist am schnellsten?

		Beispiel:
• nur ein Quadrat und eine Zahl:	Wurzel ziehen	$x^2 - 25 = 0$
• keine alleinstehende Zahl:	Ausklammern	$x^2 - 5x = 0$
• Produkt gleich 0:	jeden Faktor null setzen	$(x-2)\cdot(x+5) = 0$
• sonst:	p,q-Formel	$x^2 + 2x - 8 = 0$

3 Der schnellste Weg

Löse die Gleichung. Wähle den schnellsten Weg und schreibe ihn dazu.

a) $3x^2 - 48 = 0 \quad | +48$

Wurzel ziehen
$\Rightarrow 3x^2 = 48 \quad | :3$
$\Rightarrow x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$
$\Rightarrow x = -4$ oder $x = 4$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-4;\ 4\}$

b) $(x+3)\cdot(2x-1) = 0$

Produkt gleich 0
$\Rightarrow x + 3 = 0$ oder $2x - 1 = 0$
$\Rightarrow x = -3$ oder $x = 0{,}5$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3;\ 0{,}5\}$

c) $x^2 = 16x + 36 \quad | -16x - 36$

p,q-Formel
$\Rightarrow x^2 - 16x - 36 = 0 \quad | p, q$
$p = -16,\ q = -36$
$x_{1,2} = 8 \pm \sqrt{64 + 36}$
$= 8 \pm 10$
$\Rightarrow x_1 = 18,\ x_2 = -2$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-2;\ 18\}$
Nicht Wurzel ziehen:
x steht auch rechts.

d) $2x^2 = 8x \quad | -8x$

Ausklammern
$\Rightarrow 2x^2 - 8x = 0$
$\Rightarrow 2x\cdot(x-4) = 0$
$\Rightarrow x = 0$ oder $x = 4$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{0;\ 4\}$
Nicht durch x teilen: Dann fehlt
$x = 0$.

e) $(x+1)^2 = 16 \quad | \sqrt{}$

Wurzel ziehen
$\Rightarrow x + 1 = 4$ oder $x + 1 = -4$
$\Rightarrow x = 3$ oder $x = -5$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-5;\ 3\}$

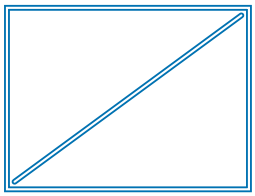
f) $2x^2 + 18 = 0 \quad | -18$

Wurzel ziehen
$\Rightarrow 2x^2 = -18 \quad | :2$
$\Rightarrow x^2 = -9$
Kein Quadrat ist negativ.
$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ \}$

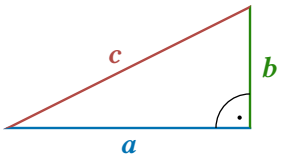
CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

4 Die Diagonalstrebe

Ein rechteckiger Rahmen aus Stahlrohr wird mit einer Diagonalstrebe versteift. Die Strebe ist 150 cm lang. Der Rahmen ist 30 cm breiter als hoch.



Hilfe: Die Strebe teilt den Rahmen in zwei rechtwinklige Dreiecke.
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras:
$a^2 + b^2 = c^2$

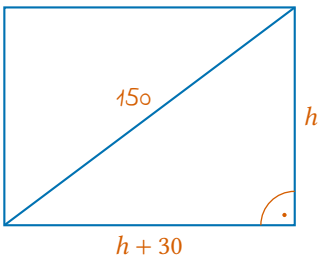


a) Wie hoch und wie breit ist der Rahmen?

h: Höhe in cm. Breite: $h + 30$

$$h^2 + (h+30)^2 = 150^2$$
$$\Rightarrow\ h^2 + h^2 + 60h + 900 = 22500$$
$$\Rightarrow\ 2h^2 + 60h + 900 = 22500 \quad | -22500$$
$$\Rightarrow\ 2h^2 + 60h - 21600 = 0 \quad | :2$$
$$\Rightarrow\ h^2 + 30h - 10800 = 0 \quad | p, q$$
$$h_{1,2} = -15 \pm \sqrt{225 + 10800}$$
$$= -15 \pm 105$$
$$\Rightarrow\ h_1 = 90,\ h_2 = -120$$

Eine Länge ist positiv: Der Rahmen ist 90 cm hoch und 120 cm breit.



b) Ein anderer Rahmen ist doppelt so breit wie hoch. Seine Strebe ist ebenfalls 150 cm lang. Wie hoch ist er?

h: Höhe in cm. Breite: $2h$

$$h^2 + (2h)^2 = 150^2$$
$$\Rightarrow\ 5h^2 = 22500 \quad | :5$$
$$\Rightarrow\ h^2 = 4500 \quad | \sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow\ h = \sqrt{4500} \approx 67{,}1$$

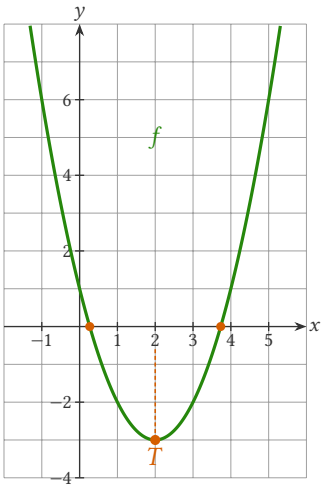
Der Rahmen ist etwa 67 cm hoch und 134 cm breit. Hier reicht Wurzel ziehen.

5 Die Mitte

Knobelaufgabe

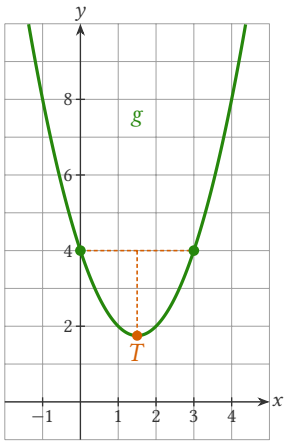
a) Bestimme den Tiefpunkt von $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Nullstellen: $x^2 - 4x + 1 = 0 \quad | \; p, q$
$p = -4,\ q = 1$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 1}$
$= 2 \pm \sqrt{3}$
Mitte: $x = 2$
$f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$
Tiefpunkt $T(2\,|\,-3)$



b) Rechts siehst du den Graphen von $g(x) = x^2 - 3x + 4$. Er hat keine Nullstellen. Bestimme trotzdem den Tiefpunkt genau.

Statt der Nullstellen zwei gleich hohe Punkte nehmen.
Abgelesen: $(0\,|\,4)$ und $(3\,|\,4)$
Probe: $g(3) = 9 - 9 + 4 = 4$
Mitte: $x = 1{,}5$
$g(1{,}5) = 2{,}25 - 4{,}5 + 4 = 1{,}75$
Tiefpunkt $T(1{,}5\,|\,1{,}75)$
Genauso mit $(1\,|\,2)$ und $(2\,|\,2)$.



Rechentraining

Info 4: Binomische Formeln

Die binomischen Formeln kürzen das Ausmultiplizieren ab. Rückwärts gelesen machen sie aus einer Summe ein Produkt.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Vorwärts: $(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

Rückwärts: $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$, denn $25 = 5^2$ und $10x = 2\cdot x\cdot 5$.

Achtung: $(x+3)^2 \neq x^2 + 9$. Rechts fehlt der mittlere Term $6x$.

6 Binomische Formeln

Multipliziere mit einer binomischen Formel aus.

a) $(x+6)^2$

$= x^2 + 2\cdot x\cdot 6 + 6^2$

$= x^2 + 12x + 36$

b) $(2x-3)^2$

$= (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2$

$= 4x^2 - 12x + 9$

c) $(3x+2)\cdot(3x-2)$

$= (3x)^2 - 2^2$

$= 9x^2 - 4$

d) $3\cdot(x+2)^2$

$= 3\cdot(x^2 + 4x + 4)$

$= 3x^2 + 12x + 12$

e) $-(x-1)^2$

$= -(x^2 - 2x + 1)$

$= -x^2 + 2x - 1$

f) Tim rechnet: $(x+4)^2 = x^2 + 16$. Finde den Fehler und rechne richtig.

Tim fehlt das Glied $2\cdot x\cdot 4$ in der Mitte.

$(x+4)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 4 + 4^2$

$= x^2 + 8x + 16$

7 Binomische Formeln rückwärts

Schreibe mit einer binomischen Formel als Produkt.

a) $x^2 - 14x + 49$

$= x^2 - 2\cdot x\cdot 7 + 7^2$

$= (x-7)^2$

b) $9x^2 - 25$

$= (3x)^2 - 5^2$

$= (3x+5)\cdot(3x-5)$

c) $x^2 + 6x + 4$

$6x = 2\cdot x\cdot 3$, aber $4 \neq 3^2$

keine binomische Formel

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul