Die p,q-Formel

1 Ohne Formel?

a) Löse $x \cdot (x+1) = 0$.

b) Löse $x \cdot (x+1) = 17$ ohne p,q-Formel. Mache die Probe.

2 Die Formel anwenden

Löse die Gleichung mit der p,q-Formel.

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$

b) $2x^2 + 12x + 16 = 0$

c) $-3x^2 - 18x - 27 = 0$

d) $5x^2 + 30x + 50 = 0$

e) $0{,}5x^2 - 3x - 3{,}5 = 0$

f) $-x^2 + 6x - 2 = 0$

g) Vergleiche die Gleichungen und die Lösungsmengen von a) bis d). Was fällt dir auf?

Kontrollergebnisse: $\{3-\sqrt{7};\ 3+\sqrt{7}\}$ $\{-1;\ 7\}$ $\{-3\}$ $\{-4;\ -2\}$ $\{-5;\ -1\}$ $\{\}$ (unter der Wurzel -1)

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Info 1: p,q-Formel

Nicht jede quadratische Gleichung lässt sich mit Wurzel ziehen, Ausklammern oder „Produkt gleich null“ lösen. Dann hilft die **p,q-Formel**. Sie gilt für Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

So geht man vor	Beispiel
Umstellen, bis rechts 0 steht:	$2x^2 - 4x = 6 \quad \mid -6$
Normieren, also durch die Zahl vor x^2 teilen:	$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad \mid :2$
	$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \mid p, q$
p und q ablesen, mit Vorzeichen:	$p = -2, \quad q = -3$
In die p,q-Formel einsetzen:	$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)}$
	$= 1 \pm \sqrt{1+3}$
	$= 1 \pm 2$
	$x_1 = 3, \quad x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-1;\ 3\}$

Tipp: Negative Zahlen beim Quadrieren in Klammern setzen, auch im Taschenrechner: $(-1)^2 = 1$, aber $-1^2 = -1$.

Lösung zu Aufgabe 1 b):

$$\begin{aligned} & x \cdot (x+1) = 17 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + x = 17 \quad \mid -17 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + x - 17 = 0 \quad \mid p, q \\ & p = 1, \quad q = -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-17)} \\ &= -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 17} \\ &= -0{,}5 \pm \sqrt{17{,}25} \\ \Rightarrow \quad x_1 &= -0{,}5 + \sqrt{17{,}25}, \quad x_2 = -0{,}5 - \sqrt{17{,}25} \\ \Rightarrow \quad \mathbb{L} &\approx \{-4{,}65;\ 3{,}65\} \end{aligned}$$

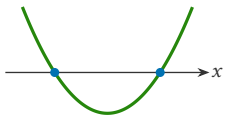
Info 2: Wie viele Lösungen?

Der Wert unter der Wurzel entscheidet: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Die Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + px + q$.

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

zwei Lösungen = zwei Nullstellen



Beispiel

$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \mid p, q$

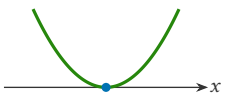
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$

$= 3 \pm 1$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{2;\ 4\}$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

eine Lösung = doppelte Nullstelle, Graph berührt die x-Achse



Beispiel

$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \mid p, q$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 1}$

$= -1 \pm 0$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1\}$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

keine Lösung = keine Nullstelle



Beispiel

$x^2 - 4x + 6 = 0 \quad \mid p, q$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 6}$

$= 2 \pm \sqrt{-2}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ \}$

Info 3: Welcher Rechenweg ist am schnellsten?

		Beispiel:
• nur ein Quadrat und eine Zahl:	Wurzel ziehen	$x^2 - 25 = 0$
• keine alleinstehende Zahl:	Ausklammern	$x^2 - 5x = 0$
• Produkt gleich 0:	jeden Faktor null setzen	$(x-2)\cdot(x+5) = 0$
• sonst:	p,q-Formel	$x^2 + 2x - 8 = 0$

3 Der schnellste Weg

Löse die Gleichung. Wähle den schnellsten Weg und schreibe ihn dazu.

a) $3x^2 - 48 = 0$

c) $x^2 = 16x + 36$

e) $(x+1)^2 = 16$

b) $(x+3)\cdot(2x-1) = 0$

d) $2x^2 = 8x$

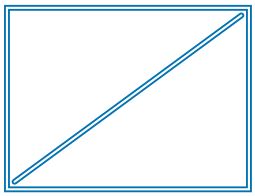
f) $2x^2 + 18 = 0$

Kontrollergebnisse: $\{0;\ 4\}$ $\{-2;\ 18\}$ $\{-3;\ 0{,}5\}$ $\{-4;\ 4\}$ $\{-5;\ 3\}$ $\{\ \}$ (unter der Wurzel -9)

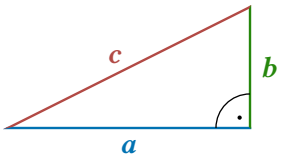
CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

4 Die Diagonalstrebe

Ein rechteckiger Rahmen aus Stahlrohr wird mit einer Diagonalstrebe versteift.
Die Strebe ist 150 cm lang. Der Rahmen ist 30 cm breiter als hoch.



Hilfe: Die Strebe teilt den Rahmen in zwei rechtwinklige Dreiecke.
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras:
$a^2 + b^2 = c^2$



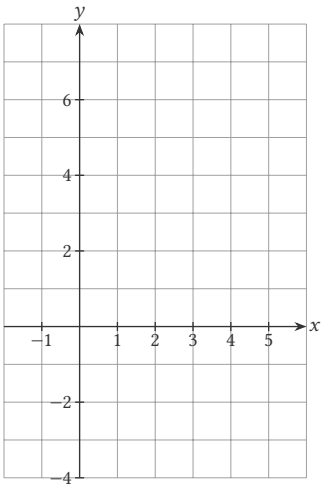
a) Wie hoch und wie breit ist der Rahmen?

b) Ein anderer Rahmen ist doppelt so breit wie hoch. Seine Strebe ist ebenfalls 150 cm lang. Wie hoch ist er?

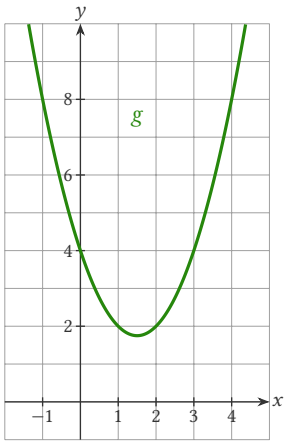
5 Die Mitte

Knobelaufgabe

a) Bestimme den Tiefpunkt von $f(x) = x^2 - 4x + 1$.



b) Rechts siehst du den Graphen von $g(x) = x^2 - 3x + 4$. Er hat keine Nullstellen. Bestimme trotzdem den Tiefpunkt genau.



CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

Rechentraining

Info 4: Binomische Formeln

Die binomischen Formeln kürzen das Ausmultiplizieren ab. Rückwärts gelesen machen sie aus einer Summe ein Produkt.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Vorwärts: $(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

Rückwärts: $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$, denn $25 = 5^2$ und $10x = 2\cdot x\cdot 5$.

Achtung: $(x+3)^2 \neq x^2 + 9$. Rechts fehlt der mittlere Term $6x$.

6 Binomische Formeln

Multipliziere mit einer binomischen Formel aus.

a) $(x+6)^2$

c) $(3x+2)\cdot(3x-2)$

e) $-(x-1)^2$

b) $(2x-3)^2$

d) $3\cdot(x+2)^2$

f) Tim rechnet: $(x+4)^2 = x^2 + 16$. Finde den Fehler und rechne richtig.

Kontrollergebnisse: $x^2 + 8x + 16$ $x^2 + 12x + 36$ $-x^2 + 2x - 1$ $3x^2 + 12x + 12$ $4x^2 - 12x + 9$ $9x^2 - 4$

7 Binomische Formeln rückwärts

Schreibe mit einer binomischen Formel als Produkt.

a) $x^2 - 14x + 49$

b) $9x^2 - 25$

c) $x^2 + 6x + 4$

Kontrollergebnisse: $(x-7)^2$ $x^2 + 6x + 4$ $(3x+5)\cdot(3x-5)$

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul