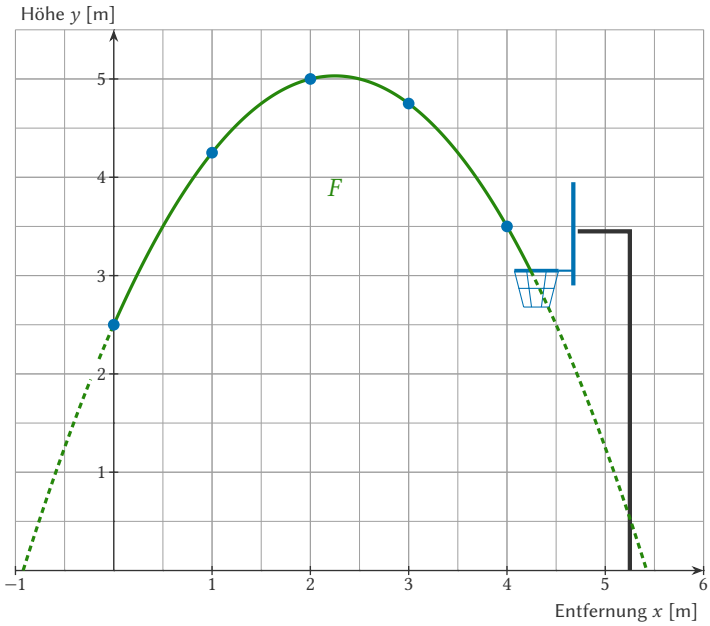
Der Korbwurf

Lea wirft beim Basketball auf den Korb. Bei $x = 0$ verlässt der Ball ihre Hände.

Die blauen Punkte zeigen, wo der Ball an fünf Stellen seiner Flugbahn ist. Die Flugbahn ist eine Parabel. Wir sehen den Ball als Punkt ohne Durchmesser.

Der Ring des Korbs hängt 3,05 m hoch. Er hat einen Durchmesser von 45 cm. Seine Mitte liegt bei $x = 4{,}3$.



1 Dein Tipp

Trifft Lea den Korb? Kreuze an, bevor du rechnest.

☐ zu kurz ☒ Treffer ☐ zu weit

Lösung: siehe Aufgabe 5

2 Die Flugbahn

$F(x)$ gibt an, wie hoch der Ball an der Stelle x ist. Der Funktionsterm hat die Form $F(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Welche der Parameter a, b und c kannst du ohne Rechnung ablesen? Begründe.

c, denn $F(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.
Also ist $c = F(0) = 2{,}5$: die Höhe, in der der Ball Leas Hände verlässt.

b) Bestimme den Funktionsterm von F.

Punkte auf dem Raster: $(0\,|\,2{,}5)$, $(2\,|\,5)$, $(4\,|\,3{,}5)$
Aus a): $c = 2{,}5$. Es fehlen a und b, also zwei weitere Punkte einsetzen.
Aus $F(2) = 5$ und $F(4) = 3{,}5$:

I: $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2{,}5 = 5 \quad | -2{,}5$
$\Rightarrow \quad 4a + 2b = 2{,}5$

II: $a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 2{,}5 = 3{,}5 \quad | -2{,}5$
$\Rightarrow \quad 16a + 4b = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2{,}5 \\ 16 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-4\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2{,}5 \\ 0 & -4 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II} : (-4)} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2{,}5 \\ 0 & 1 & 2{,}25 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2\cdot \mathrm{II} + \mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2{,}25 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} : 4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 2{,}25 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -0{,}5, \quad b = 2{,}25, \quad c = 2{,}5\}$
Also: $F(x) = -0{,}5x^2 + 2{,}25x + 2{,}5$

ℹ Links sollen am Ende oben links und unten rechts eine 1 stehen und sonst 0. Rechts stehen dann a und b.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

c) Prüfe deinen Term an einem Punkt, den du in b) nicht benutzt hast.

$F(1) = -0{,}5 + 2{,}25 + 2{,}5 = 4{,}25$ (oder $F(3) = -4{,}5 + 6{,}75 + 2{,}5 = 4{,}75$): Der Term passt.

| Die drei Punkte aus b) erfüllt jeder richtig gerechnete Term von selbst; erst ein neuer Punkt prüft alles.

| Achtung: Wer $(2\,|\,5)$ als Hochpunkt nimmt, bekommt $F(1) = 4{,}375$ und merkt den Fehler hier.

3 Der höchste Punkt

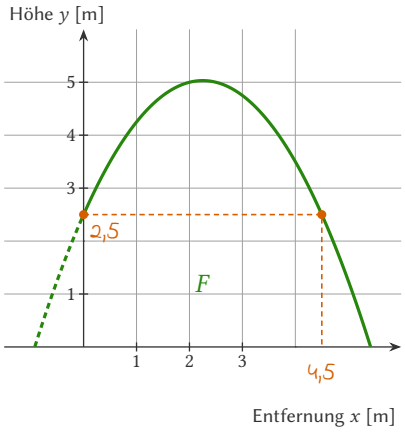
a) In welcher Entfernung von Lea wäre der Ball wieder genau so hoch wie beim Abwurf?

Gleiche Höhe wie beim Abwurf: $F(x) = 2{,}5$

$$\begin{aligned} -0{,}5x^2 + 2{,}25x + 2{,}5 &= 2{,}5 && |\ -2{,}5 \\ \Rightarrow\quad -0{,}5x^2 + 2{,}25x &= 0 && |\ x \text{ ausklammern} \\ \Rightarrow\quad x\cdot(-0{,}5x + 2{,}25) &= 0 \\ \Rightarrow\quad x &= 0 \quad \text{oder} \quad -0{,}5x + 2{,}25 = 0 \\ \Rightarrow\quad x_1 &= 0, \quad x_2 = 4{,}5 \\ \Rightarrow\quad \mathbb{L} &= \{0;\ 4{,}5\} \end{aligned}$$

In 4,5 m Entfernung wäre der Ball wieder 2,5 m hoch.

| Nach dem Abziehen bleibt keine Zahl ohne x übrig: Ausklammern geht schneller als die p,q-Formel.



b) Wie hoch fliegt der Ball höchstens? In welcher Entfernung von Lea ist das?

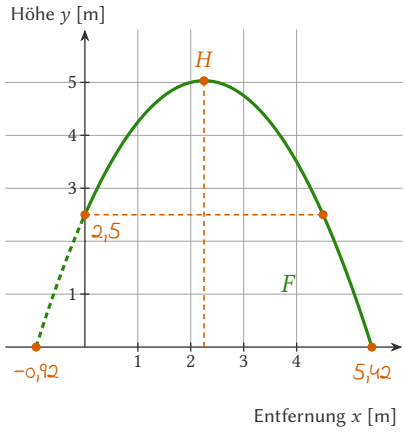
Wie bei den Nullstellen: Zwei gleich hohe Stellen liegen symmetrisch zum Hochpunkt H. Er liegt also in der Mitte von 0 und 4,5. $x = \dfrac{0 + 4{,}5}{2} = 2{,}25$

$F(2{,}25) = -0{,}5\cdot 2{,}25^2 + 2{,}25\cdot 2{,}25 + 2{,}5 \approx 5{,}03$

Der Ball fliegt höchstens etwa 5,03 m hoch, und zwar in 2,25 m Entfernung von Lea.

| Auch richtig: Über die Nullstellen: $x_1 \approx -0{,}92$, $x_2 \approx 5{,}42$, die Mitte ist $\dfrac{-0{,}92 + 5{,}42}{2} = 2{,}25$, derselbe Wert.

| Achtung: Nicht 5 m bei $x = 2$: Das ist nur der höchste gezeichnete Punkt.



4 Ohne Korb

Stell dir vor, der Korb wäre nicht da.

a) In welcher Entfernung von Lea käme der Ball auf dem Boden auf?

Auf dem Boden: $F(x) = 0$

$$\begin{aligned} -0{,}5x^2 + 2{,}25x + 2{,}5 &= 0 && | :(-0{,}5) \\ \Rightarrow\ x^2 - 4{,}5x - 5 &= 0 && | p, q \\ \Rightarrow\ x_{1,2} &= 2{,}25 \pm \sqrt{(-2{,}25)^2 - (-5)} \\ \Rightarrow\ x_{1,2} &= 2{,}25 \pm \sqrt{10{,}0625} \\ \Rightarrow\ x_1 &= 2{,}25 - \sqrt{10{,}0625},\quad x_2 = 2{,}25 + \sqrt{10{,}0625} \\ \Rightarrow\ \mathbb{L} &\approx \{-0{,}92;\ 5{,}42\} \end{aligned}$$

Der Ball käme in etwa 5,42 m Entfernung von Lea auf dem Boden auf.

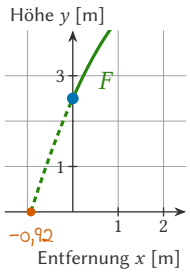
Vor der p,q-Formel muss vor x^2 eine 1 stehen, deshalb zuerst durch $-0{,}5$ teilen.

Probe: $\frac{-0{,}92 + 5{,}42}{2} = 2{,}25$, die Mitte aus Aufgabe 3.

Kontrolllösung: $\approx 5{,}4$ m

b) Was bedeutet die andere Lösung deiner Rechnung?

$x_1 \approx -0{,}92$ liegt 92 cm hinter Lea. Zu Leas Wurf passt diese Lösung nicht, denn der Wurf beginnt erst bei $x = 0$.
Man kann sie aber deuten: Würde Lea den Ball 92 cm weiter hinten vom Boden hochwerfen, entsprechend schneller und steiler, hätte er genau dieselbe Bahn (im Bild gestrichelt).

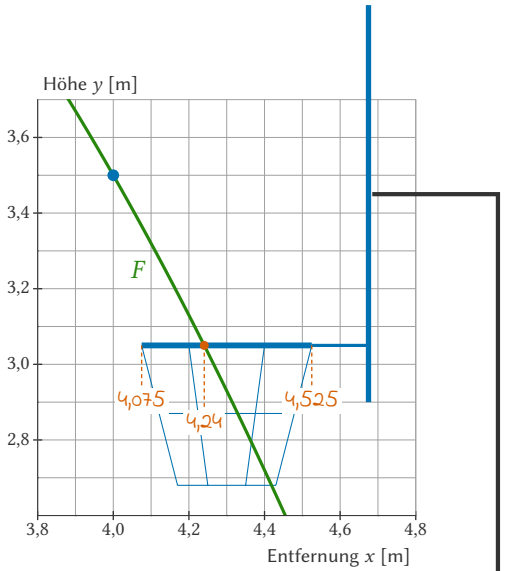


5 Trifft Lea?

Der Ball bleibt ein Punkt ohne Durchmesser.

Trifft Lea den Korb? Begründe.

Stimmt dein Tipp aus Aufgabe 1?



Entscheidend ist, wo der Ball 3,05 m hoch ist: $F(x) = 3{,}05$

$$\begin{aligned} -0{,}5x^2 + 2{,}25x + 2{,}5 &= 3{,}05 && | -3{,}05 \\ \Rightarrow\ -0{,}5x^2 + 2{,}25x - 0{,}55 &= 0 && | :(-0{,}5) \\ \Rightarrow\ x^2 - 4{,}5x + 1{,}1 &= 0 && | p, q \\ \Rightarrow\ x_{1,2} &= 2{,}25 \pm \sqrt{(-2{,}25)^2 - 1{,}1} \\ \Rightarrow\ x_{1,2} &= 2{,}25 \pm \sqrt{3{,}9625} \\ \Rightarrow\ x_1 &= 2{,}25 - \sqrt{3{,}9625},\quad x_2 = 2{,}25 + \sqrt{3{,}9625} \\ \Rightarrow\ \mathbb{L} &\approx \{0{,}26;\ 4{,}24\} \end{aligned}$$

Bei 0,26 steigt der Ball, bei 4,24 fällt er.
Der Ring reicht von $4{,}3 - 0{,}225 = 4{,}075$ bis $4{,}3 + 0{,}225 = 4{,}525$.
4,24 liegt dazwischen: Lea trifft. Richtig war „Treffer".

Achtung: $F(4{,}3) \approx 2{,}93$ heißt nicht „zu tief": Bei $x = 4{,}3$ kann der Ball schon durch den Ring gefallen sein.

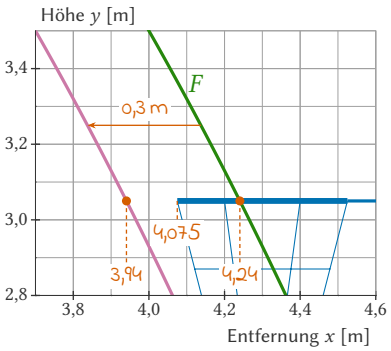
CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul

6 Einen Schritt zurück

Lea stellt sich 30 cm weiter hinten auf und wirft genau gleich. Trifft sie noch? Wie weit darf sie sich höchstens nach hinten stellen? Der Ball ist weiterhin nur ein Punkt.

Lea wirft genau gleich: Die Flugbahn behält ihre Form und rückt um 0,3 m nach links, auch die Stelle in Ringhöhe: $4{,}24 - 0{,}3 = 3{,}94$.
3,94 liegt vor dem Ring, der erst bei 4,075 beginnt. Der Ball ist zu kurz: Lea trifft nicht.
Höchstens $4{,}24 - 4{,}075 \approx 0{,}165$ m, also rund 16 cm nach hinten.

Auch richtig: Mit der verschobenen Bahn neu rechnen: $F(x + 0{,}3) = 3{,}05$ liefert ebenfalls $x \approx 3{,}94$.



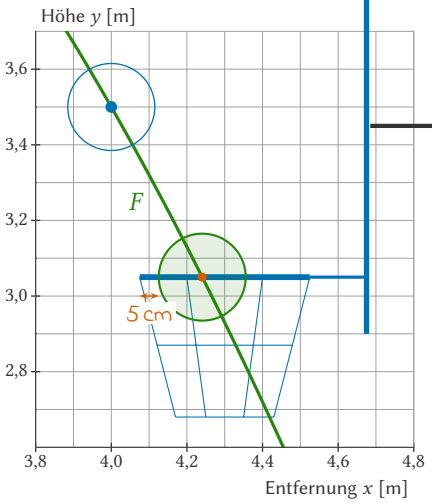
7 Der Ball ist kein Punkt

Bisher hast du mit dem Ball als Punkt gerechnet, also mit seiner Mitte.
Lea spielt mit einem Ball der Größe 6. Er hat einen Durchmesser von 23 cm.

a) Fliegt der Ball durch den Ring, ohne ihn zu berühren?

Die Ballmitte fliegt weiter auf der Bahn F, aber der Ball reicht 11,5 cm um seine Mitte herum. Die Ballmitte muss also mindestens 11,5 cm von beiden Rändern entfernt durch die Ringhöhe fliegen:
zwischen $4{,}075 + 0{,}115 = 4{,}19$ und $4{,}525 - 0{,}115 = 4{,}41$.
4,24 liegt dazwischen: Der Ball berührt den Ring nicht.
Vorn bleiben aber nur $4{,}24 - 4{,}19 \approx 0{,}05$ m, also rund 5 cm.

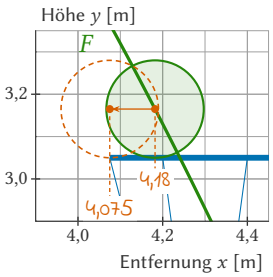
In Aufgabe 6 waren es als Punkt rund 16 cm. Genau gerechnet bleibt vorn noch etwas weniger, rund 3 cm, weil der Ball schräg durch den Ring fliegt.



b) Ein Ball kann den Ring berühren und trotzdem in den Korb fallen, manchmal erst über das Brett oder den hinteren Ring. Wie muss der Ball den vorderen Rand berühren, damit er meist noch hineinfällt? Begründe. Wie weit darf Lea sich dann höchstens nach hinten stellen?

So, dass seine Mitte dabei schon über dem vorderen Rand ist oder dahinter.
Denn der Ring drückt den Ball von der Berührstelle aus in Richtung seiner Mitte: Ist sie schon über dem Korb, geht der Stoß nach vorn, und der Ball springt ans Brett oder an den hinteren Ring und fällt oft noch hinein. Ist sie noch davor, prallt er zurück.
Grenzfall: Mitte genau über dem vorderen Rand, bei $x = 4{,}075$ in der Höhe $3{,}05 + 0{,}115 = 3{,}165$.
Auf der bisherigen Bahn in dieser Höhe: $F(x) = 3{,}165$

$$
\begin{aligned}
-0{,}5x^2 + 2{,}25x + 2{,}5 &= 3{,}165 && \mid -3{,}165\\
\Rightarrow\ -0{,}5x^2 + 2{,}25x - 0{,}665 &= 0 && \mid :(-0{,}5)\\
\Rightarrow\ x^2 - 4{,}5x + 1{,}33 &= 0 && \mid p, q\\
\Rightarrow\ x_{1,2} &= 2{,}25 \pm \sqrt{(-2{,}25)^2 - 1{,}33}\\
\Rightarrow\ x_{1,2} &= 2{,}25 \pm \sqrt{3{,}7325}\\
\Rightarrow\ x_1 = 2{,}25 - \sqrt{3{,}7325},&\quad x_2 = 2{,}25 + \sqrt{3{,}7325}\\
\Rightarrow\ \mathbb{L} &\approx \{0{,}32;\ 4{,}18\}\ \text{(bei 0,32 steigt der Ball noch)}
\end{aligned}
$$



Die Bahn darf um $4{,}18 - 4{,}075 \approx 0{,}11$ m nach links rücken: Lea darf rund 11 cm zurückgehen.

Zum Vergleich: als Punkt 16 cm, ganz ohne Ringberührung 5 cm.

CC BY-NC-SA 4.0 · Patrick Saul